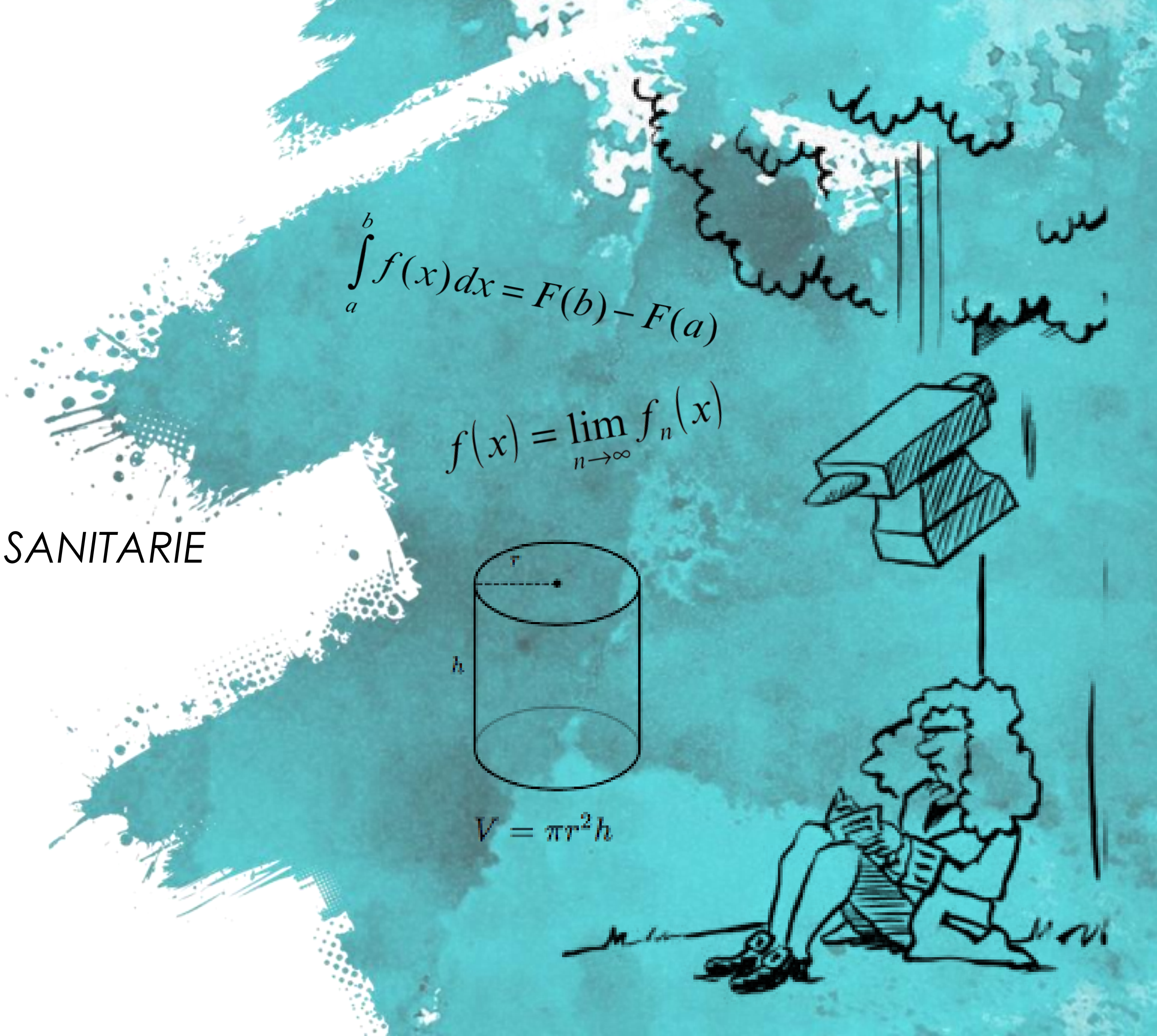
Associazione Studenti e Professori di Medicina Uniti Per

MATEMATICA

PRECORSI PER MEDICINA E PROFESSIONI SANITARIE



In collaborazione con Servizio Tutor della
Scuola di Medicina dell'Università di Padova

1. Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono 2 senza reimmissione.

Calcolare la probabilità che siano entrambe fiori.

A) 3/40

B) 1/8

C) 3/52

D) 7/29

E) 6/13

In un mazzo di 40 carte i fiori sono 10.

Definiamo
F = estrazione di una carta di seme fiori
P(F) = 10/40 =1/4

Non vi è reimmissione, pertanto gli eventi sono dipendenti tra loro.

Perciò:
$P(F1 \cap F2) = P(F1) \cdot P(F2|F1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{52}$

<u>Risposta corretta</u>: C

1. Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono 2 senza reimmissione.

Calcolare la probabilità che siano entrambe fiori.

A) 3/40

B) 1/8

C) <u>3/52</u>

D) 7/29

E) 6/13

2. Un'urna contiene 10 palline, di cui 4 rosa, 3 blu e 3 verdi. Si estraggono 2 palline con reimmissione. Si calcoli la probabilità di estrarre 2 palline di colore diverso.

A) 0,55

B) 0,66

C) 0,33

D) 0,25

E) 0,75

R = estrazione pallina rosa
B = estrazione pallina blu
V = estrazione pallina verde
E = estrazione di due palline di colore diverso

Calcoliamo la probabilità di estrarre una pallina rosa, blu o verde.
$P(R) = 4/10 = 0{,}4$
$P(B) = 3/10 = 0{,}3$
$P(V) = 3/10 = 0{,}3$
$P(E) = 2 \cdot [P(R \cap B) + P(B \cap V) + P(V \cap R)] =$
$= 2 \cdot [P(R) \cdot P(B) + P(B) \cdot P(V) + P(V) \cdot P(R)] =$
$= 2 \cdot [0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}4] =$
$= 0{,}66$

Si noti che la somma degli eventi deve essere moltiplicata per 2. Questo perché, ad esempio, nell'estrazione della pallina rossa e verde, può essere estratta prima la rossa e poi la verde o prima la verde e poi la rossa. Perciò, per ogni coppia di colori vi sono 2 possibilità.

Risposta corretta: B

2. Un'urna contiene 10 palline, di cui 4 rosa, 3 blu e 3 verdi. Si estraggono 2 palline con reimmissione. Si calcoli la probabilità di estrarre 2 palline di colore diverso.

A) 0,55

B) <u>0,66</u>

C) 0,33

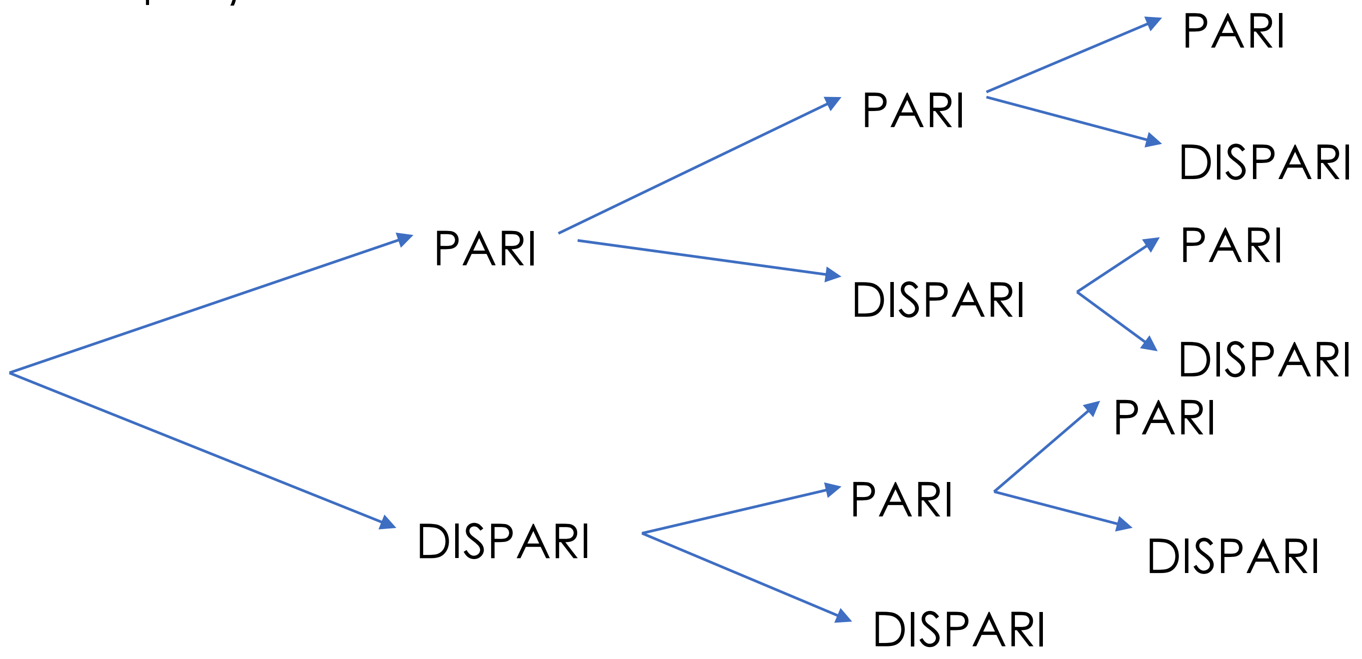
D) 0,25

E) 0,75

3. Rosetta lancia tre dadi. Qual è la probabilità che escano almeno due numeri pari?

A) 3/8
B) 1/2
C) 1/8
D) 2/3
E) 1/4

Per risolvere il quesito si può costruire un albero della probabilità dove ogni freccia ha probabilità di ½ di verificarsi (ogni dado ha tre numeri pari tre dispari)



Il risultato si ottiene sommando i percorsi con le frecce azzurre. Un percorso ha probabilità pari a 1/8 di verificarsi ($1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$) e i percorsi che soddisfano la richiesta sono 4.

Si ottiene: $1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = ½$

<u>Risposta corretta</u>: B

Oppure molto più facilmente…

Legge delle prove ripetute: P = probabilità che escano esattamente due numeri pari + probabilità che escano tre numeri pari.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

La prima corrisponde a ⅜ e la seconda ad 1/8 , la somma di esse da come risultato ½.

3. Rosetta lancia tre dadi. Qual è la probabilità che escano almeno due numeri pari?

A) 3/8

B) <u>1/2</u>

C) 1/8

D) 2/3

E) 1/4

4. La nota proprietà dei logaritmi: $log_a(bc) = log_a(b) + log_a(c)$**, è valida se:**

A) Sempre

B) $bc \neq 0$

C) $b > 0\ e\ c > 0$

D) $bc > 0$

E) Mai

L'argomento del logaritmo deve sempre essere > 0.

Quindi $bc > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

Ma se ponessi $bc > 0$ potrebbero essere entrambi positivi oppure entrambi negativi, dunque nella seconda parte potrei avere gli argomenti < 0.

Dunque mi basta porre $b > 0$ e $c > 0$ perché prodotto di numeri positivi da sempre numero positivo $(+ \cdot + = +)$.

4. La nota proprietà dei logaritmi: $log_a(bc) = log_a(b) + log_a(c)$**, è valida se:**

A) Sempre

B) $bc \neq 0$

C) $\underline{b > 0 \; e \; c > 0}$

D) $bc > 0$

E) Mai

5. Date la funzione omografica $y = \frac{4x+13}{2x+4}$ calcola il centro C:

A) $(2; -2)$

B) $(-2; 2)$

C) $(\frac{4}{13}; 2)$

D) $(\frac{13}{4}; 2)$

E) $(-\frac{13}{4}; 2)$

Una funzione omografica è una funzione del tipo y = (ax + b)/(cx + d) che, nel piano cartesiano, può dar luogo a tre diversi tipi di luoghi geometrici a seconda dei valori dei coefficienti a, b, c, d: un'iperbole equilatera, una retta o una retta orizzontale.

Il suo centro è calcolabile con la formula $c\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$.
Dunque $c\left(-\frac{4}{2};\frac{4}{2}\right)=(-2;2)$

Tra l'altro, piccola curiosità, x = -2 e y = 2 sono i due asintoti della funzione, in questo caso iperbole equilatera.

5. Date la funzione omografica $y = \frac{4x+13}{2x+4}$ calcola il centro C:

A) $(2; -2)$

B) $\underline{(-2; 2)}$

C) $(\frac{4}{13}; 2)$

D) $(\frac{13}{4}; 2)$

E) $(-\frac{13}{4}; 2)$

6. Sia ABC un triangolo, si conduca da B la retta parallela ad AC. Si consideri un punto K della retta, nella parte di piano in cui non è presente il triangolo, tale che BC≃KB. Se $\widehat{ABC}$= 60° e $\widehat{BCA}$ = 80° quanto vale l'angolo in K?

A) 40°

B) 80°

C) 60°

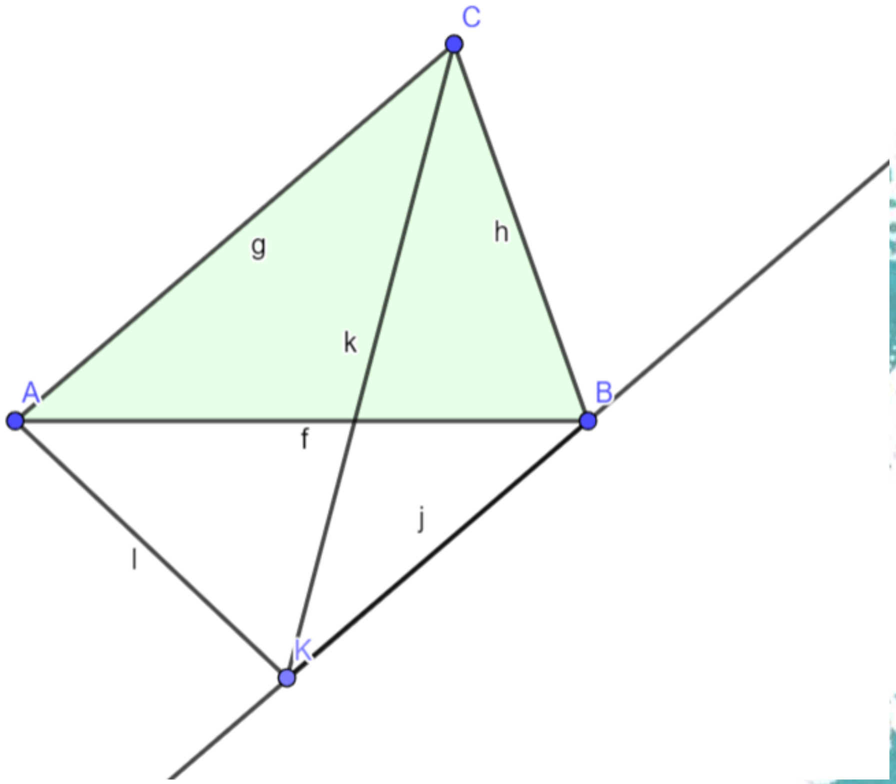
D) 20°

E) 50°

Dopo aver disegnato la figura si può procedere con due metodi diversi:
metodo geometrico-algebrico o **metodo geometrico-sintetico.**

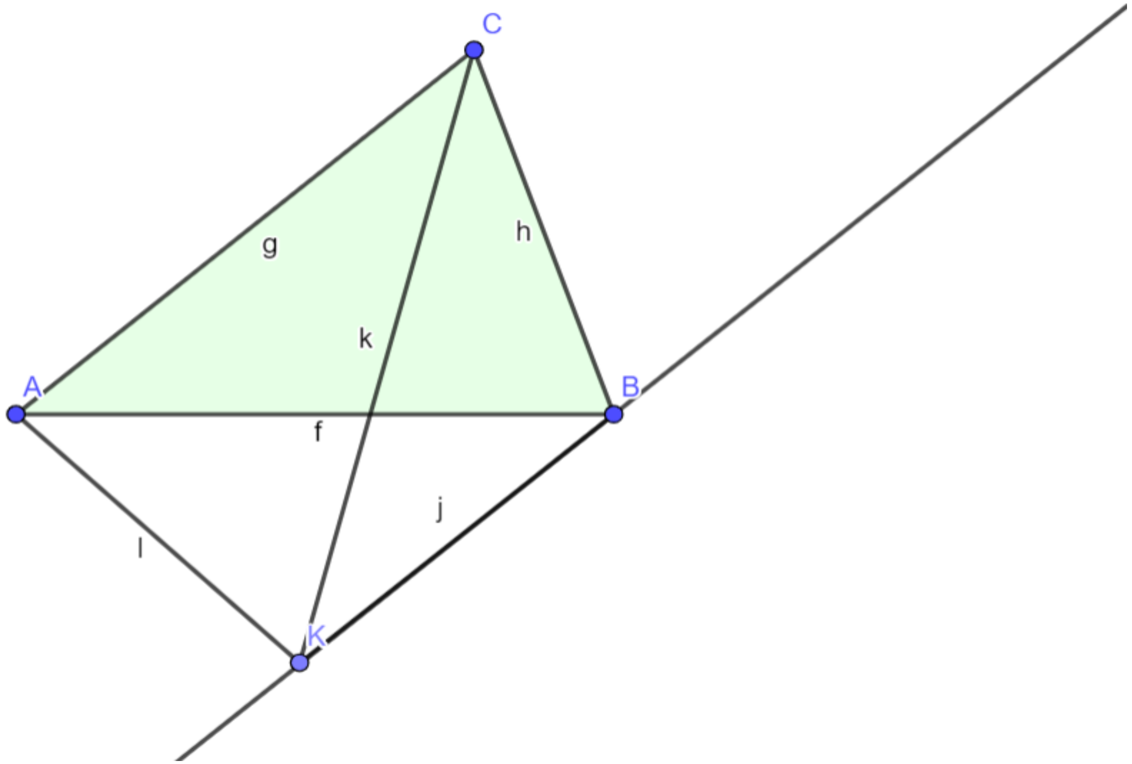
Scegliendo il primo, si ricava l'ampiezza dell'angolo **CAB=180°- (60°+80°) = 40°.**
Essendo AC//KB, queste tagliate dalla trasversale AB formano gli angoli **CAB e ABK alterni e interni e congruenti per criterio di parallelismo.**

Se ora si considera il triangolo KBC questo è isoscele per definizione.
L'angolo KBC vale 40°+60°= 100°.
Essendo gli angoli alla base di un triangolo isoscele congruenti per teorema si può calcolare l'ampiezza dell'angolo in K.
CKB = 180°- (100)°/2 = 40°



Scegliendo il metodo geometrico-sintetico, si dimostra che gli angoli **ACK=BKC per parallelismo** (angoli alterni interni di rette parallele).
A questo punto dato che KBC è un triangolo isoscele **BKC=KCB per teorema.**
Si può quindi concludere che **BCK=KCB=ACK per proprietà transitiva.** Il segmento **BK è la bisettrice dell'angolo in C** per i cui i tre angoli valgono **BCK=BKC=ACK= 40°**

<u>**Risposta corretta**</u>**: A**



6. Sia ABC un triangolo, si conduca da B la retta parallela ad AC. Si consideri un punto K della retta, nella parte di piano in cui non è presente il triangolo, tale che BC$\simeq$KB. Se $\widehat{ABC}$= 60° e $\widehat{BCA}$ = 80° quanto vale l'angolo in K?

A) 40°

B) 80°

C) 60°

D) 20°

E) 50°

7. Nella figura qui sotto ABCD è un rombo. È noto che il lato AD del rombo è 13 cm, l'area del rombo è 120 cm2 e la diagonale maggiore AC è lunga 24 cm. Quanto vale la somma delle lunghezze di BD e DH?

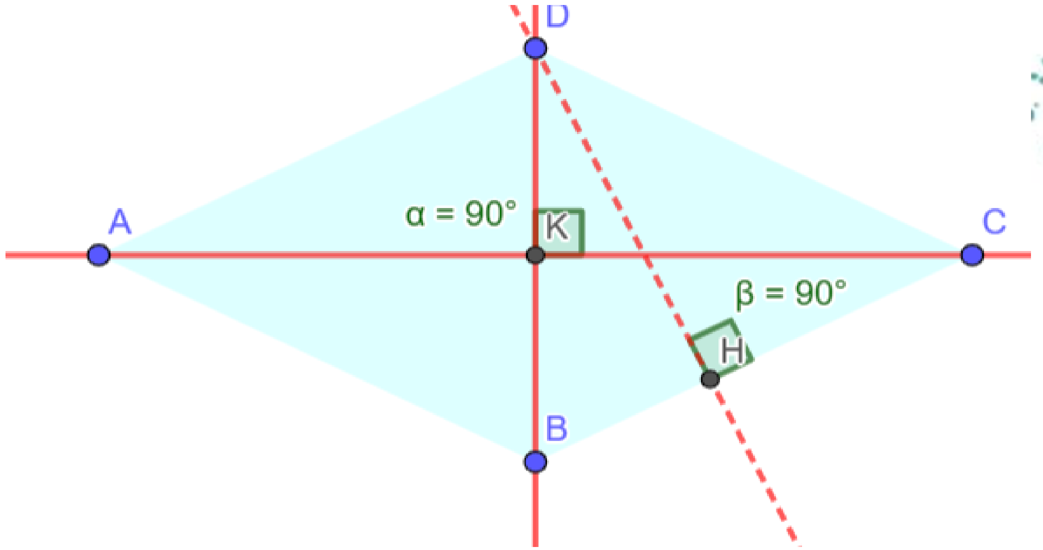
A) 19 cm

B) $\frac{250}{13}$ cm

C) 20cm

D) 21 cm

E) $\frac{521}{13}$ cm



Per risolvere il problema, si usano le formule inverse dell'area del rombo:

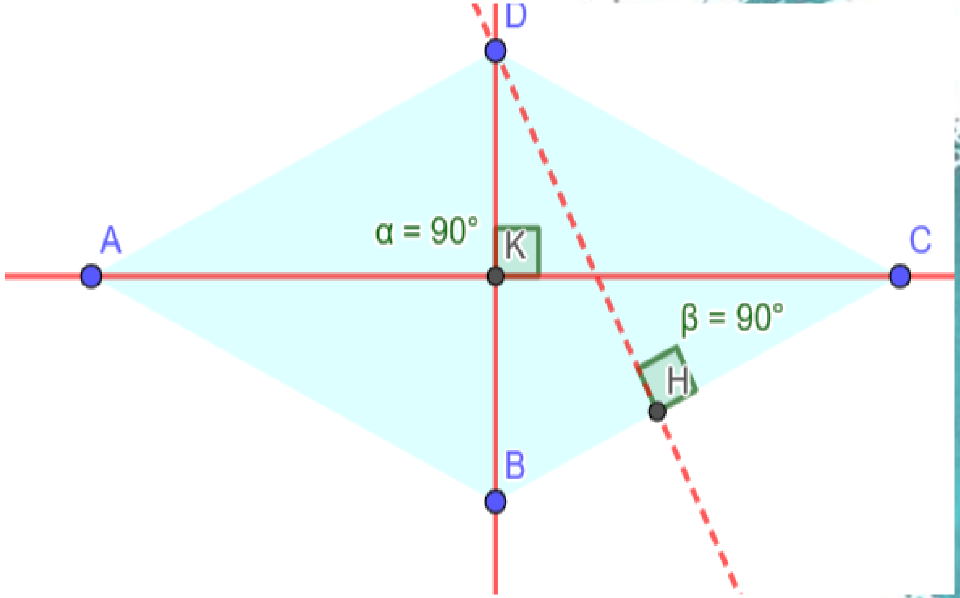
DB = 2A/AC = 2(120 cm²)/24 cm = 10 cm

Per calcolare DH si considera il triangolo BDC la cui area è metà di quella del rombo.

DH altezza relativa alla base BC è determinabile come
DH= $2A_t$/BC = 2(120/2 cm²)/13 cm = 120/13 cm

BD+DH= 120/13 cm + 10 cm = 250/13 cm

<u>**Rispostare corretta**</u>**: B**



7. Nella figura qui sotto ABCD è un rombo. È noto che il lato AD del rombo è 13 cm, l'area del rombo è 120 cm2 e la diagonale maggiore AC è lunga 24 cm. Quanto vale la somma delle lunghezze di BD e DH?

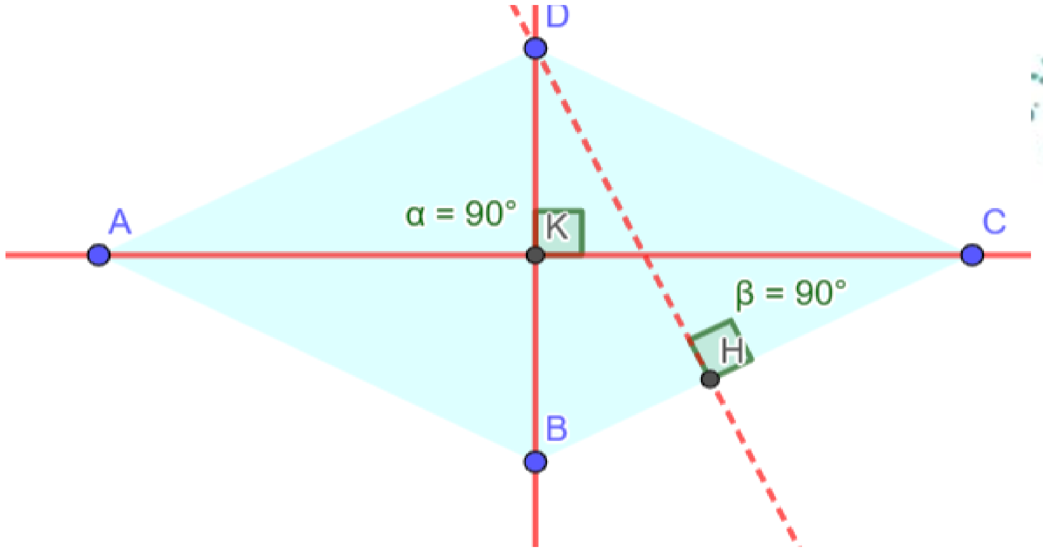
A) 19 cm

B) $\frac{250}{13}$ cm

C) 20cm

D) 21 cm

E) $\frac{521}{13}$ cm



8. Due coni C_1 e C_2 circolari e retti hanno $R_1=2R_2$. L'altezza H_1 del cono C_1 è ⅓ dell'altezza H_2 del cono C_2. Qual è il rapporto tra i volumi (V_1/V_2)?

A) $V_1/V_2 = 1/\pi$

B) $V_1/V_2= 2/3$

C) $V_1/V_2= 3/2$

D) $V_1/V_2= 4/3$

E) $V_1/V_2= \frac{2\pi}{3}$

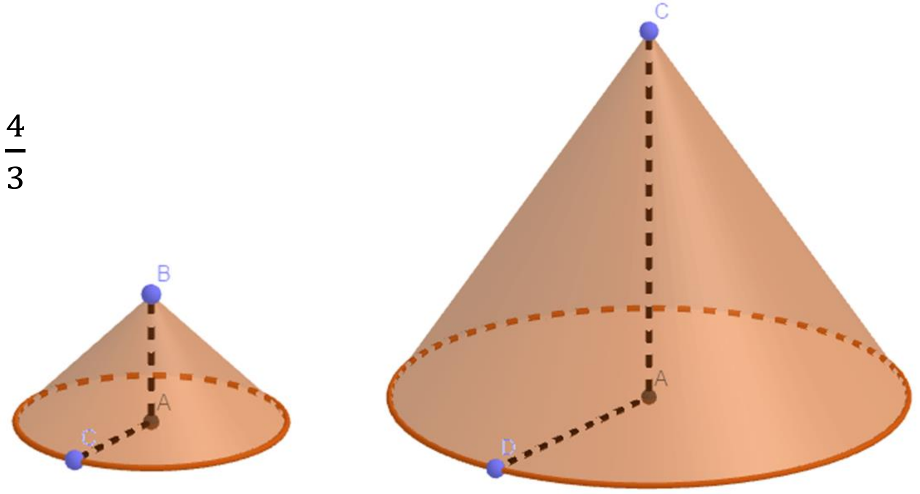
Il volume del cono si calcola come $\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{\pi r^2 h}}{\boldsymbol{3}}$ quindi tenendo conto che $R_1 = 2R_2$ e che $H_1 = \frac{1}{3} H_2$ è possibile calcolare:

Il volume di C_1 in funzione del raggio e dell'altezza di C_2: $V_1 = \frac{\pi(2R_2)^2 \frac{1}{3} H_2}{3}$

Il volume del cono C_2: $V_2 = \frac{\pi {R_2}^2 H_2}{3}$

Si calcola il rapporto tra V_1 e V_2: $\frac{\frac{\pi 4 {R_2}^2 \frac{1}{3} H_2}{3}}{\frac{\pi {R_2}^2 H_2}{3}} = \frac{4}{3}$

<u>Risposta corretta</u>: D



8. Due coni C_1 e C_2 circolari e retti hanno $R_1=2R_2$. L'altezza H_1 del cono C_1 è ⅓ dell'altezza H_2 del cono C_2. Qual è il rapporto tra i volumi (V_1/V_2)?

A) $V_1/V_2 = 1/\pi$

B) $V_1/V_2 = 2/3$

C) $V_1/V_2 = 3/2$

D) <u>$V_1/V_2 = 4/3$</u>

E) $V_1/V_2 = \frac{2\pi}{3}$

9. Il lato di un esagono regolare è $\mathbf{18\sqrt{3}}$ cm. Determina il perimetro di un quadrato inscritto nella circonferenza inscritta nell'esagono.

A) $27\sqrt{2}$

B) $216\sqrt{2}$

C) $27\sqrt{3}$

D) $108\sqrt{2}$

E) $106\sqrt{2}$

Come prima cosa si procede disegnando la figura, in seguito è possibile calcolare l'**apotema** dell'esagono regolare come $l \times sin60 = \frac{\sqrt{3}}{2} l = 27\ cm.$

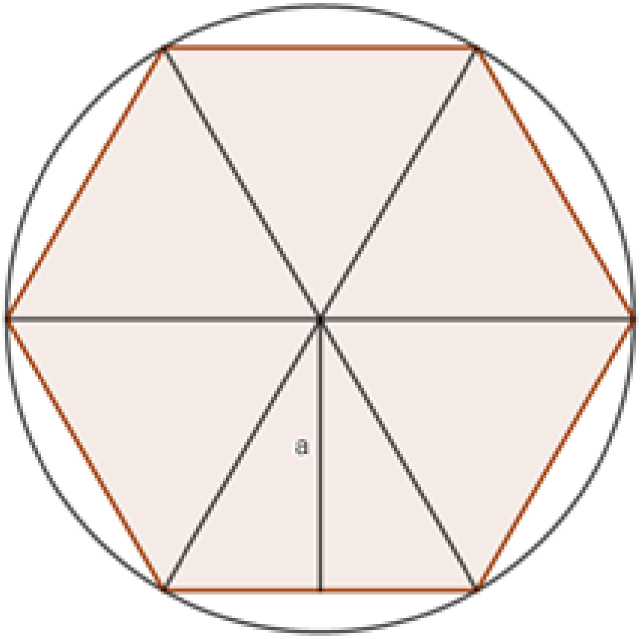
L'apotema dell'esagono regolare è anche il raggio della circonferenza inscritta in esso a = r.

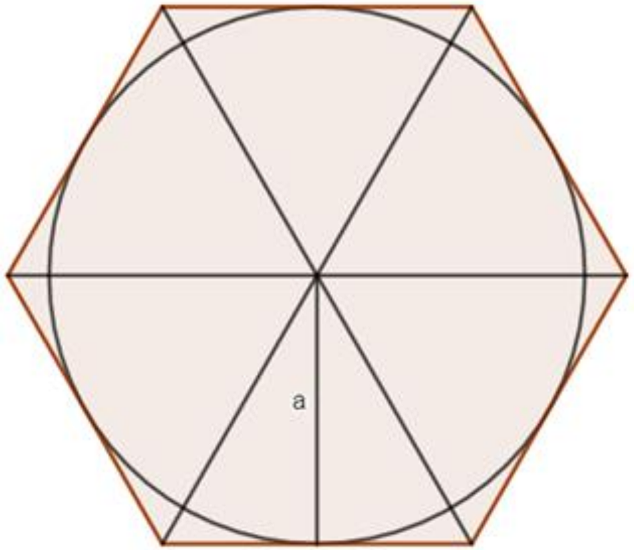
La diagonale del quadrato inscritto in questa circonferenza sarà uguale a 2r
d = 2r = 2 · 27 = 54 cm

Inoltre sappiamo che $\boldsymbol{d = l\sqrt{2}}$ perciò $l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{54}{\sqrt{2}}$ cm

Il perimetro è uguale a $4l = \frac{216}{\sqrt{2}}$ che razionalizzato risulta $108\sqrt{2}$ cm.

<u>**Risposta corretta**</u>**: D**





9. Il lato di un esagono regolare è $\mathbf{18\sqrt{3}}$ cm. Determina il perimetro di un quadrato inscritto nella circonferenza inscritta nell'esagono.

A) $27\sqrt{2}$

B) $216\sqrt{2}$

C) $27\sqrt{3}$

D) $\underline{108\sqrt{2}}$

E) $106\sqrt{2}$

10. Per quali valori di k l'equazione $\boldsymbol{k/2\,x^2 + (2k-6)x + 3/2\,k - 6 = 0}$ ha come soluzione x = 3?

A) k = 0

B) k = 2/3

C) k = 2

D) k = 3/2

E) k = 1

Il modo più semplice per risolvere il quesito è sostituire 3 al posto della x.
In questo modo si ottiene un'equazione di primo grado con incognita k.

$k/2\ (3)^2 + (2k - 6)(3) + 3/2k - 6 = 0$

$9/2k + 6k + 3/2k - 18 - 6 = 0$

$12k = 24$

$k = 2$

Risposta corretta: C

10. Per quali valori di k l'equazione $\boldsymbol{k/2\,x^2+(2k-6)x+3/2\,k-6=0}$ ha come soluzione x = 3?

A) k = 0

B) k = 2/3

C) <u>k = 2</u>

D) k = 3/2

E) k = 1

11. Quale delle seguenti equazioni ha come soluzioni x = 8/3 e x = 1/3 ?

A) $x^2 - 3/8\,x + 1 = 0$

B) $1/3\,x^2 - 8 = x$

C) $8/9 + x^2 = 3x$

D) $3x^2 - 8x = 9$

E) Nessuna delle precedenti

Il metodo più rapido per risolvere il quesito è sostituire le due soluzioni nelle equazioni fornite per verificare se in una delle equazioni l'uguaglianza viene verificata.
Sostituiamo la soluzione $x = 1/3$:

Nell'equazione fornita nell'opzione A: $(1/3)^2 - 3/8(1/3) + 1 = 0$
$1/9 - 1/8 + 1 = 0$
L'uguaglianza non è verificata e **l'opzione A è errata.**

Nell'equazione fornita nell'opzione B: $1/3(1/3)^2 - 8 = (1/3)$
$1/27 - 8 = 1/3$
L'uguaglianza non è verificata e **l'opzione B è errata**

Nell'equazione fornita nell'opzione C: $8/9 + (1/3)^2 = 3(1/3)$
$8/9 + 1/9 = 1$
L'uguaglianza è verificata. Sostituiamo anche la seconda soluzione per controllare.
$8/9 + (8/3)^2 = 3(8/3)$
$8/9 + 64/9 = 8$
$72/9 = 8$
L'uguaglianza è verificata anche in questo caso.

<u>Risposta corretta</u>: C

11. Quale delle seguenti equazioni ha come soluzioni x = 8/3 e x = 1/3 ?

A) $x^2 - 3/8\,x + 1 = 0$

B) $1/3\,x^2 - 8 = x$

C) $\underline{8/9 + x^2 = 3x}$

D) $3x^2 - 8x = 9$

E) Nessuna delle precedenti

12. Quale delle seguenti equazioni ha somma delle soluzioni uguale a 8?

A) $2x^2 - 16x = 13/8$

B) $x^2 + 8x + 16 = 0$

C) $4x^2 - 2x - 7 = 0$

D) $x - 8x + 2 = 0$

E) Nessuna delle precedenti

Per risolvere il quesito dobbiamo ricordare che per un'equazione di secondo grado del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ valgono le seguenti relazioni tra le due soluzioni x_1 e x_2:

$x_1 + x_2 = - b/a$
$x_1x_2 = c/a$

Il quesito ci fornisce la somma delle due soluzioni, quindi applichiamo la prima relazione alle equazioni fornite nelle soluzioni e verifichiamo che ce ne sia una per cui la relazione è verificata.

Per la soluzione A: $b = -16$ e $a = 2$; $x_1 + x_2 = 8$

<u>Risposta corretta</u>: A

12. Quale delle seguenti equazioni ha somma delle soluzioni uguale a 8?

A) $\underline{2x^2 - 16x = 13/8}$

B) $x^2 + 8x + 16 = 0$

C) $4x^2 - 2x - 7 = 0$

D) $x - 8x + 2 = 0$

E) Nessuna delle precedenti

13. $6^3 - 7^3$ **è uguale a:**

A) $(-1)^3$

B) 1

C) -127

D) $(6 - 7) \cdot (6^2 - 6 \cdot 7 + 7^2)$

E) Impossibile nei numeri reali

Si deve ricordare la differenza di due cubi

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}^{2}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{2})$$

Nel caso di interesse si ottiene dunque:

$$6^3-7^3=(6-7)\cdot(6^2+6\cdot 7+7^2)=-1\cdot 127=-127$$

<u>Risposta corretta</u>: C

13. $6^3 - 7^3$ **è uguale a:**

A) $(-1)^3$

B) 1

C) -127

D) $(6 - 7) \cdot (6^2 - 6 \cdot 7 + 7^2)$

E) Impossibile nei numeri reali

14. Risolvere la seguente espressione: $e^{\ln e^{\frac{x+1}{x}}}$

A) x con $x \neq 0$

B) Impossibile

C) $e\sqrt[x]{e}$ con $x \neq 0$

D) $e^{\frac{1}{x}}$ con $x \neq 0$

E) e^{x}

Si devono ricordare alcune proprietà:

- $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$
- $\log_a a = 1$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$e^{\left(\frac{x+1}{x}\ln e\right)} = e^{\frac{x+1}{x}} = e^{\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)} = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e \cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \boldsymbol{e} \cdot \sqrt[x]{\boldsymbol{e}}$$

<u>Risposta corretta</u>: C

14. Risolvere la seguente espressione: $e^{ln\, e^{\frac{x+1}{x}}}$

A) x con $x \neq 0$

B) Impossibile

C) $e\sqrt[x]{e}$ con $x \neq 0$

D) $e^{\frac{1}{x}}$ con $x \neq 0$

E) e^{x}

15. Un triangolo scaleno ABC ha i lati BC=12m e AC=24m. L'angolo γ tra essi compreso misura 60°. Quanto misura il lato AB?

A) 12 m

B) $12\sqrt{3}$ cm

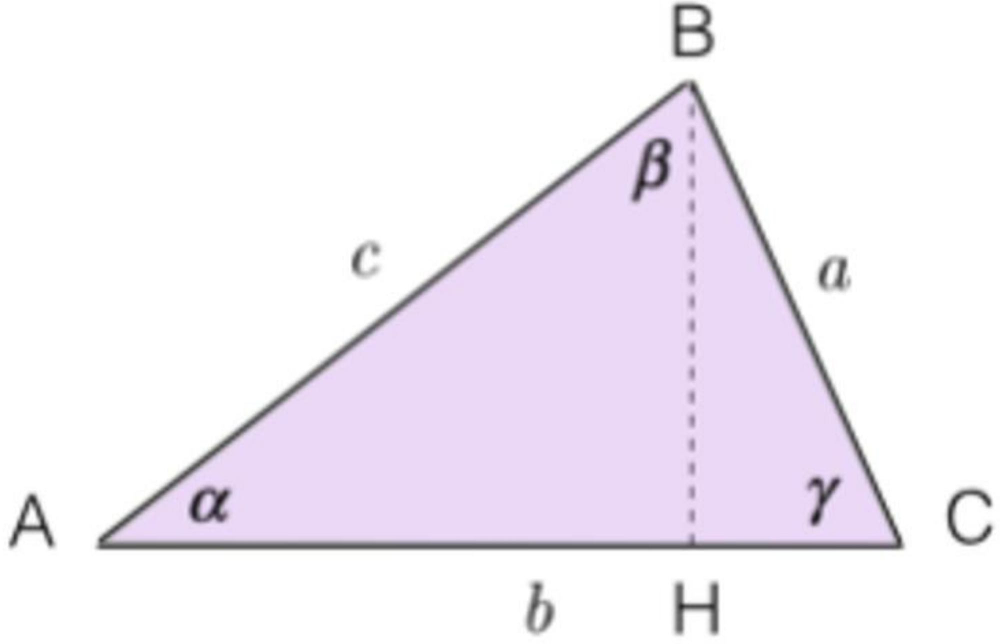
C) 12 cm

D) $12\sqrt{3}$ m

E) $\frac{12}{\sqrt{3}}$ m

Per risolvere il quesito possiamo applicare molto velocemente il teorema di Carnot.
Tale teorema afferma che in un QUALSIASI triangolo, noti due dei tre lati e l'angolo tra essi compreso, è possibile calcolarsi il terzo lato incognito utilizzando la formula:

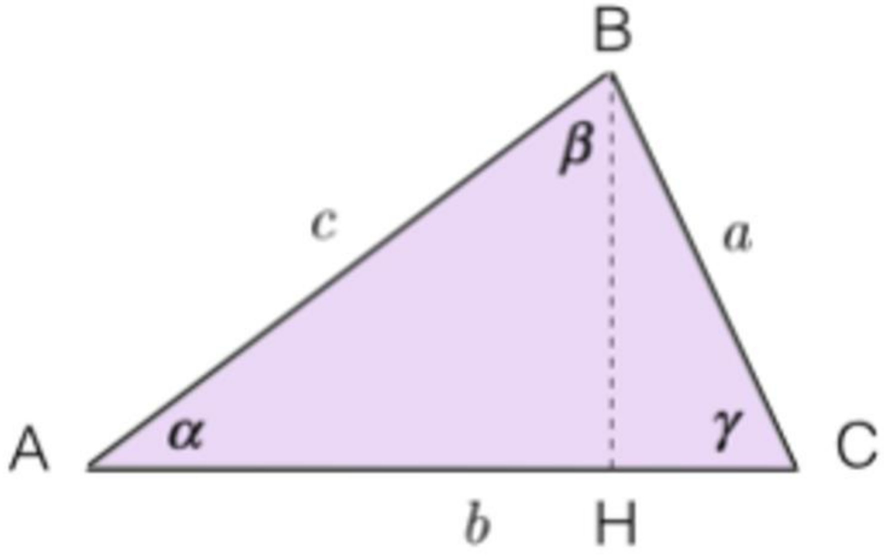
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



In questo caso quindi avremo:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\gamma$$
$$AB^2 = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \cos 60°$$
$$AB^2 = 576 + 144 - 576 \cdot \frac{1}{2} = 576 + 144 - 288 = 432$$
$$AB = \sqrt{432} = 12\sqrt{3}\, m$$

Risposta corretta: D



15. Un triangolo scaleno ABC ha i lati BC=12m e AC=24m. L'angolo γ tra essi compreso misura 60°. Quanto misura il lato AB?

A) 12 m

B) $12\sqrt{3}$ cm

C) 12 cm

D) <u>$12\sqrt{3}$ m</u>

E) $\frac{12}{\sqrt{3}}$ m

16. Data la semicirconferenza di centro O e diametro AB=10, condurre per il punto C, posto sul prolungamento di AB dalla parte di A, la semiretta tangente in M alla semiconferenza. Sapendo che tg($\widehat{MCO}$)=tg(α)= $\frac{3}{4}$ determinare le misure dei lati OC e CM.

A) OC= $\frac{\sqrt{20}}{3}$; MC= $\frac{5}{3}$

B) OC= $\frac{20}{3}$; MC = $\frac{25}{3}$

C) OC= 20; MC = 25

D) OC= $\frac{25}{3}$; MC = $\frac{20}{3}$

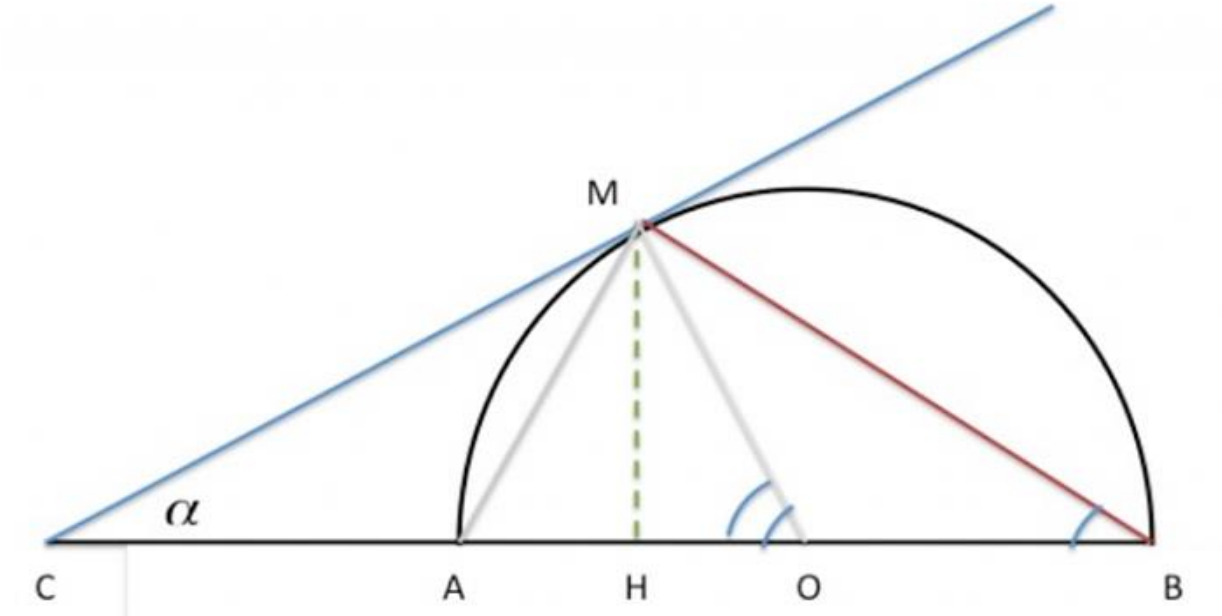
E) OC= 25; MC = 20

Consideriamo il triangolo CMO: esso è un triangolo rettangolo perché il MC, essendo tangente alla semicirconferenza è anche perpendicolare al raggio (OM).

Affermato ciò possiamo calcolarci i lati ignoti (CM e OC) utilizzando il secondo teorema della trigonometria:

$$MC = MO \cdot \tan\left(\widehat{MOC}\right) = MO \cdot \cot(\alpha)$$

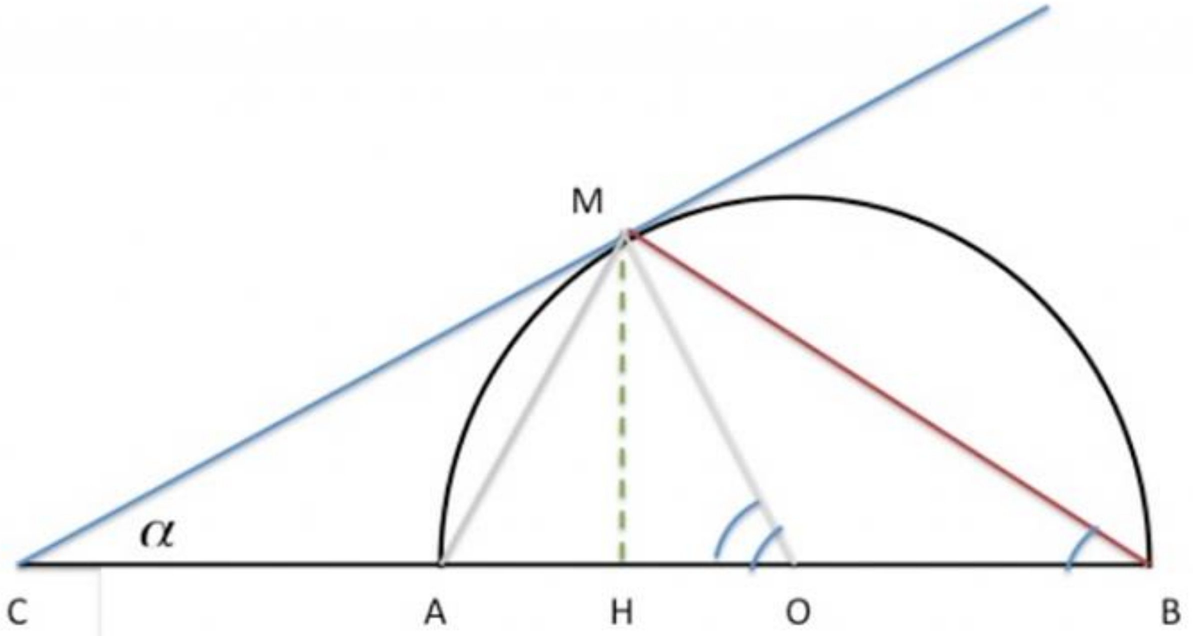
$$MC = MO \cdot \cot(\alpha) = MO \cdot \frac{1}{\tan(\alpha)} = 5 \cdot \frac{1}{{}^{3}/_{4}} = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$



A questo punto è sufficiente usare il teorema di Pitagora per calcolarci OC.

$$OC = \sqrt{MC^2 + MO^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{\frac{400}{9} + 25} = \sqrt{\frac{400 + 225}{9}} + \sqrt{\frac{625}{9}} = \frac{25}{3}$$

<u>Risposta corretta</u>: D



16. Data la semicirconferenza di centro O e diametro AB=10, condurre per il punto C, posto sul prolungamento di AB dalla parte di A, la semiretta tangente in M alla semicirconferenza. Sapendo che tg($\widehat{MCO}$)=tg(α)=$\frac{3}{4}$ determinare le misure dei lati OC e CM.

A) OC= $\frac{\sqrt{20}}{3}$; MC= $\frac{5}{3}$

B) OC= $\frac{20}{3}$; MC = $\frac{25}{3}$

C) OC= 20; MC = 25

D) <u>OC= $\frac{25}{3}$; MC = $\frac{20}{3}$</u>

E) OC= 25; MC = 20

17. $\boldsymbol{sec\,(\alpha)\cdot\frac{1}{csec\,(\alpha)} - tan\,(\alpha)\, + [cos\,(\alpha)\, + sen(\alpha)]^2}$ **è uguale a:**

A) $cot\,(\alpha)\, - tan\,(\alpha)\, + [cos\,(\alpha)\, + sen(\alpha)]^2$

B) $cot\,(\alpha)\, - tan\,(\alpha)\, + cos^2(a) + sin^2(a)$

C) $\alpha^{\,2} + sin^2(a)$

D) $1 + sin\,(2\alpha)$

E) 1

Si devono ricordare alcune definizioni e proprietà delle funzioni trigonometriche:

- ✓ Secante e cosecante sono due funzioni goniometriche definite a partire dalla circonferenza goniometrica e sono, rispettivamente, il reciproco della funzione coseno e il reciproco della funzione seno:

$$\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}; \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

- ✓ La tangente si può definire come il rapporto tra il seno ed il coseno dello stesso angolo, per cui:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

- ✓ Il seno di 2α è uguale a due volte il prodotto tra $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$:

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

- ✓ La relazione fondamentale della goniometria afferma che:

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$

- ✓ Lo svolgimento di un quadrato di un binomio:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

Quindi:

$$\sec(\alpha)\cdot\frac{1}{\csc(\alpha)}-\tan(\alpha)+\left(\cos(\alpha)+sen(\alpha)\right)^2=$$

$$\frac{1}{\cos(\alpha)}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sin(\alpha)}}-\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)+(\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2+2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)=$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}-\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}+1+\sin(2\alpha)=\mathbf{1}+\mathbf{sin(2\boldsymbol{\alpha})}$$

<u>Risposta corretta</u>: D

17. $\boldsymbol{sec\,(\alpha)\cdot\frac{1}{csec\,(\alpha)}-tan\,(\alpha)\;+[cos\,(\alpha)\;+sen(\alpha)]^2}$ **è uguale a:**

A) $cot\,(\alpha)\;-tan\,(\alpha)\;+[cos\,(\alpha)\;+sen(\alpha)]^2$

B) $cot\,(\alpha)\;-tan\,(\alpha)\;+cos^2(a)+sin^2(a)$

C) $\alpha^{\,2}+sin^2(a)$

D) $\underline{1+sin\,(2\alpha)}$

E) 1

18. Moltiplica la differenza tra i ⅖ di a e la metà di b per il doppio di c, somma poi al risultato il quoziente tra ¼ di a e la differenza tra il doppio di b e 1. Se a = 5/3 , b= 2 , c=3/4 qual è il risultato?

A) -15/36

B) -1/2

C) -5/36

D) -1/3

E) -13/36

Per risolvere il quesito bisogna semplicemente trasportare il testo nella equazione letterale descritta dal quesito ricordandosi poi, una volta sostituite le lettere con i loro corrispondenti valori numerici, di svolgere le operazioni nell' ordine corretto.
Così otterremo:

$$(\frac{2}{5}a - \frac{1}{2}b)2c + \frac{\frac{1}{4}a}{2b-1} =$$

Ricordando che a=5/3, b=2, c=3/4 sostituisco i valori ed eseguo i calcoli ottenendo come soluzione - 13/36

<u>Risposta corretta</u>: E

18. Moltiplica la differenza tra i ⅖ di a e la metà di b per il doppio di c, somma poi al risultato il quoziente tra ¼ di a e la differenza tra il doppio di b e 1. Se a = 5/3 , b= 2 , c=3/4 qual è il risultato?

A) -15/36

B) -1/2

C) -5/36

D) -1/3

E) -13/36

19. Un negoziante rivendendo un cappotto che aveva acquistato per 125 €, ha guadagnato 26 €. Che percentuale di guadagno ha realizzato?

A) 20%

B) 120,8%

C) 21,6%

D) 20,8%

E) 120,4%

Considerato che il negoziante riesca a guadagnare 26€ vuole dire che lui riuscirà a vendere il cappotto a 151€ , per risolvere il problema basta impostare una semplice proporzione

125 : 151 = 100 : x
x = 15100/125 = 120,8

Ne consegue che 151€ sono il 120,8% di 125€ ma poiché il testo del problema ci chiede il guadagno del negoziante si dovrà escludere l'opzione B.
Il guadagno effettivo infatti corrisponderà a 120,8-100= 20,8%

Risposta corretta: D

19. Un negoziante rivendendo un cappotto che aveva acquistato per 125 €, ha guadagnato 26 €. Che percentuale di guadagno ha realizzato?

A) 20%

B) 120,8%

C) 21,6%

D) <u>20,8%</u>

E) 120,4%

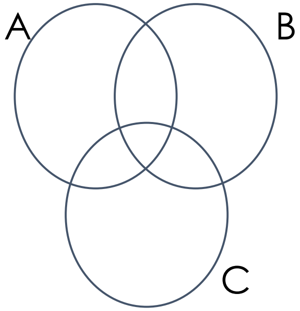
20. Individuare quale diagramma soddisfa la relazione insiemistica esistente fra i tre termini seguenti:

A: Persone con i capelli biondi

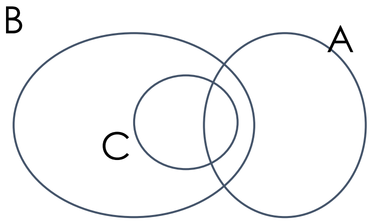
B: Persone maggiorenni

C: Persone con la patente B

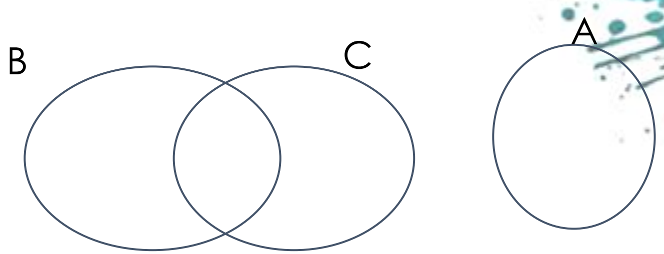
A)



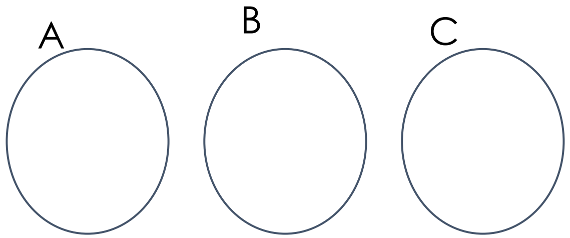
B)



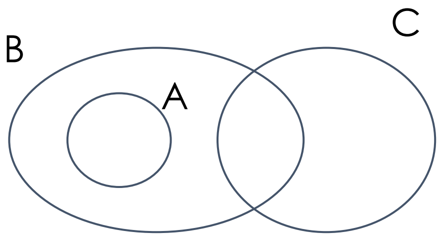
C)



D)



E)



Per risolvere il problema bisogna pensare ovviamente ai rapporti che ci possono essere tra i vari gruppi di persone

- possono esistere persone bionde maggiorenni e anche con la patente B
- ogni persona con la patente B è maggiorenne

Da queste affermazioni sopra riportate possiamo concludere che A è certamente intersecato sia a B che a C mentre l'insieme delle persone con la patente deve essere compreso in quello dei maggiorenni quindi C è totalmente inglobato dentro B.

Risposta corretta: B

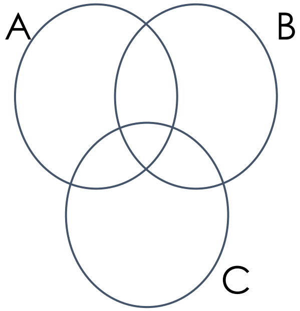
20. Individuare quale diagramma soddisfa la relazione insiemistica esistente fra i tre termini seguenti:

A: Persone con i capelli biondi

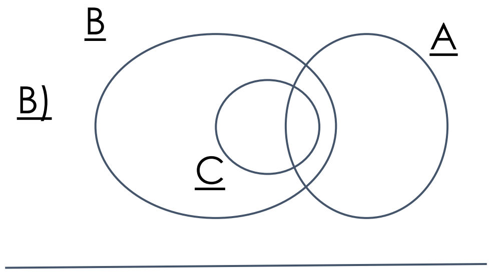
B: Persone maggiorenni

C: Persone con la patente B

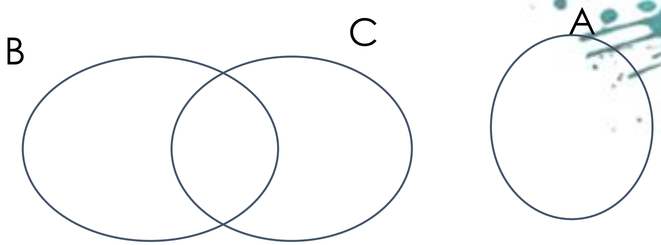
A)



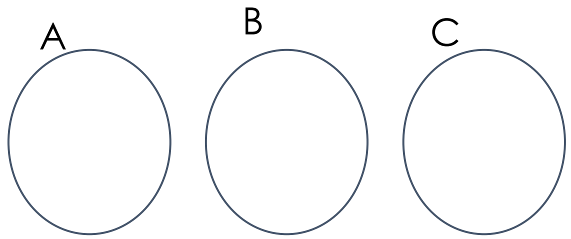
B)



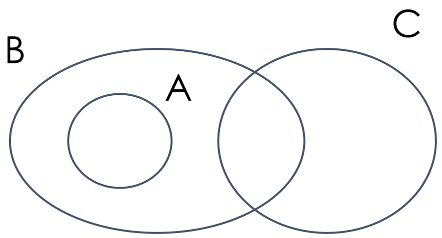
C)



D)



E)



21. Ad una lotteria partecipano 10 uomini e 10 donne. Vengono estratti casualmente 2 vincitori tra i partecipanti totali. Qual è la probabilità che tra i vincitori vi sia almeno una donna?

A) 2/9
B) 12/13
C) 1/3
D) 1/4
E) 29/38

Bisogna prestare attenzione al termine «almeno»: ciò significa che viene richiesta la probabilità che trai vincitori vi sia una donna oppure due donne.

Definiamo gli eventi:

A = scelta una vincitrice donna

B = scelto un vincitore uomo

Indichiamo con il numero 1 la prima estrazione e con il numero 2 la seconda estrazione.

Perciò:

$P(A1 \cap A2)$ = probabilità di estrarre una donna alla prima estrazione e una donna alla seconda

$P(A1 \cap B2)$ = probabilità di estrarre una donna alla prima estrazione e un uomo alla seconda

$P(B1 \cap A2)$ = probabilità di estrarre un uomo alla prima estrazione e una donna alla seconda

Effettuando i calcoli tramite l'utilizzo della probabilità condizionata si trova che:

$P(A1 \cap A2) = P(A1) \cdot P(A2|A1) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38}$

$P(A1 \cap B2) = P(A1) \cdot P(B2|A1) = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{5}{19}$

$P(B1 \cap A2) = P(B1) \cdot P(A2|B1) = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{5}{19}$

Perciò la probabilità di estrarre almeno una donna è data dall'unione, o somma, delle 3 probabilità sopra indicate:

$P(A1 \cap A2) + P(A1 \cap B2) + P(B1 \cap A2) = \frac{9}{38} + \frac{5}{19} + \frac{5}{19} = \frac{29}{38}$

Risposta corretta: E

21. Ad una lotteria partecipano 10 uomini e 10 donne. Vengono estratti casualmente 2 vincitori tra i partecipanti totali. Qual è la probabilità che tra i vincitori vi sia almeno una donna?

A) 2/9
B) 12/13
C) 1/3
D) 1/4
E) <u>29/38</u>

22. Dati due punti, A (1;-3) e B (-7;4), individuare la retta passante per essi.

A) $y = -\frac{7}{8}x - \frac{17}{8}$

B) $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$

C) $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$

D) $y = -\frac{3}{2}x - 3$

E) non è possibile determinare la risposta

Per risolvere il problema utilizziamo la formula

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}$$

Sostituendo i valori

$$\frac{y-(-3)}{4-(-3)}=\frac{x-1}{7-1}$$

$$\frac{y+3}{7}=\frac{x-1}{-8}$$

$$y=-\frac{7}{8}x+\frac{7}{8}-3$$

$$y=-\frac{7}{8}x-\frac{17}{8}$$

Risposta corretta: A

22. Dati due punti, A (1;-3) e B (-7;4), individuare la retta passante per essi.

A) $y = -\frac{7}{8}x - \frac{17}{8}$

B) $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$

C) $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$

D) $y = -\frac{3}{2}x - 3$

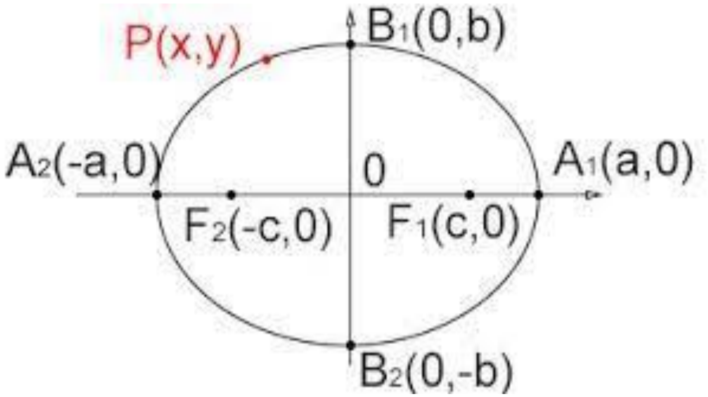
E) non è possibile determinare la risposta

23. Gli elementi necessari a definire l'ellisse come luogo geometrico sono:

A) il fuoco e la direttrice
B) il raggio e il centro
C) il piano e due rette
D) due fuochi
E) due rette

Per risolvere il quesito è sufficiente rifarsi alla definizione di ellisse.
Un'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

Risposta corretta: D



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

23. Gli elementi necessari a definire l'ellisse come luogo geometrico sono:

A) il fuoco e la direttrice

B) il raggio e il centro

C) il piano e due rette

D) <u>due fuochi</u>

E) due rette

24. Data la retta di equazione 6y + 4x – 5 = 0 individuare la retta passante per il punto P (2;-1/2) ad essa perpendicolare.

A) $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

B) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

C) $y = \frac{3}{4}x - \frac{17}{2}$

D) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{6}$

E) $y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$

Calcoliamo il coefficiente angolare della retta data. Se consideriamo l'equazione generica di una retta

$$ax + by + c = 0$$

Il coefficiente angolare m_1 risulterà pari a $m_1 = -\frac{a}{b}$, che nel nostro caso sarà pari a $-\frac{2}{3}$

Sappiamo che date due rette di coefficiente m_1 e m_2 esse saranno perpendicolari se

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Quindi nel nostro caso $m_2 = \frac{3}{2}$

La formula di una retta passante per un punto P_0 e di coefficiente angolare m è $y - y_0 = m(x - x_0)$

Quindi sostituendo i valori dati $y - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

Risposta corretta: A

24. Data la retta di equazione 6y + 4x – 5 = 0 individuare la retta passante per il punto P (2;-1/2) ad essa perpendicolare.

A) $\cancel{y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}}$

B) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

C) $y = \frac{3}{4}x - \frac{17}{2}$

D) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{6}$

E) $y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$

25. La parabola $x = - y^2 + 4y - 4$:

A) È tangente alla retta $y = \frac{1}{8}x$

B) Ha come direttrice $x = -\frac{1}{4}$

C) Il fuoco ha coordinate $(\frac{1}{4}; 2)$

D) Sono corrette la risposta A e E

E) Il vertice ha coordinate (0;2)

Il vertice di una parabola con asse parallelo all'asse delle x ha coordinate: $x = -\frac{\Delta}{4a}$ e $y = -\frac{b}{2a}$. La risposta E è vera.

La direttrice ha equazione: $x = -\frac{1+\Delta}{4a} = \frac{1}{4}$
Il fuoco ha coordinate: $x = \frac{1-\Delta}{4a}$ e $y = -\frac{b}{2a}$ quindi in questo caso: $\left(-\frac{1}{4}; 2\right)$

Infine, per verificare la tangenza con la retta data, è necessario mettere a sistema retta e parabola e verificare che il Δ sia uguale a zero.
La A e la E sono affermazioni vere.

<u>Risposta corretta</u>: D

25. La parabola $x = -y^2 + 4y - 4$:

A) È tangente alla retta $y = \frac{1}{8}x$

B) Ha come direttrice $x = -\frac{1}{4}$

C) Il fuoco ha coordinate $(\frac{1}{4}; 2)$

D) Sono corrette la risposta A e E

E) Il vertice ha coordinate (0;2)

26. Definire il dominio della seguente funzione: $f(x) = ln\left(\frac{1}{e^{x}-1}\right) + \sqrt{3x^{2}+1}$

A) D=∀x∈R-{e}

B) D=]-∞;1/3] ∩ [e¸+∞[

C) D= [0¸+∞[

D) D= [1/3, +∞[

E) D=]0¸+∞[

Definire il dominio della seguente funzione: $f(x) = ln\left(\frac{1}{e^x-1}\right) + \sqrt{3x^2+1}$

D: $\frac{1}{e^x-1} > 0 \;\vee\; 3x^2 + 1$

$e^x - 1 > 0 \;\vee\; \forall x \in \mathbb{R}$

$e^x > 1$

$x > 0$

Risposta corretta: E

26. Definire il dominio della seguente funzione: $\boldsymbol{f(x) = ln\left(\frac{1}{e^{x}-1}\right) + \sqrt{3x^{2}+1}}$

A) D=∀x∈R-{e}

B) D=]-∞;1/3] ∩ [e¸+∞[

C) D= [0¸+∞[

D) D= [1/3, +∞[

E) <u>D=]0¸+∞[</u>

$f(x) = \ln(\frac{1}{e^{x}-1}) + \sqrt{3x^{2}+1}$

27. Determina il periodo della funzione $y = tan4x + sin\ \frac{3}{2}x$

A) π/2

B) 2π

C) π

D) 4π

E) Nessuna delle precedenti

Una funzione si dice periodica di periodo T, con $T > 0$, se, per qualsiasi numero *k* intero, si ha che $f(x) = f(x + kT)$

Vale la relazione per cui se f(x) ha periodo T1 allora la funzione f(mx) avrà periodo T = T1/m.
È necessario calcolare il m.c.m. tra i due periodi.

Il periodo di y = tanx è π dunque il periodo di y = tan4x è T = π/4
Il periodo di y = sin3/2x è T = 2π/3/2 cioè 4/3 π.

m.c.m.(π/4; 4π/3) = π · m.c.m. (1/4;4;3)= π · m.c.m.(3/12;16/12)= π/12 · m.c.m.(3;16)= π/12 · 48= 4π

<u>Risposta corretta</u>: D

27. Determina il periodo della funzione $y = tan4x + sin\ \frac{3}{2}x$

A) π/2

B) 2π

C) π

D) <u>4π</u>

E) Nessuna delle precedenti

28. Si risolva la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{x^2 - 9x} > 6$

A) $\forall x \in \mathbb{R}$

B) $x \leq 0 \vee x \geq 9$

C) $x \leq 0 \vee x > 12$

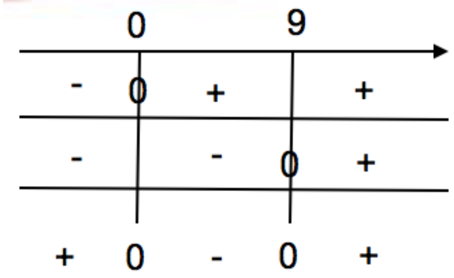
D) $x < -3 \vee x > 12$

E) $x < -3 \vee x \geq 9$

Consideriamo in primo luogo le condizioni di esistenza:

$$x^2 - 9x \geq 0 \Rightarrow x(x-9) \geq 0$$

Separando i due fattori e facendo lo schema dei segni otteniamo che le soluzioni sono $x \leq 0 \lor x \geq 9$.



A questo punto risolviamo la disequazione. Avendo a entrambi i membri quantità positive, possiamo elevare al quadrato lasciando inalterato il segno di disequazione e otteniamo:

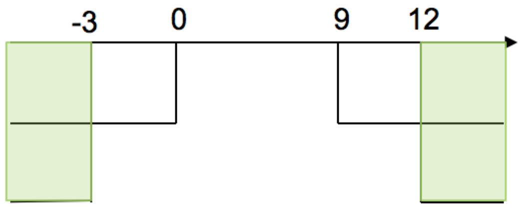
$$x^2 - 9x > 36 \Rightarrow x^2 - 9x - 36 > 0$$

Passando all'equazione associata $x^2 - 9x - 36 = 0$, possiamo calcolare il Δ:

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot (-36) = 225$$

Otteniamo quindi le soluzioni $x_{1/2} = \frac{9 \pm 15}{2}$, ovvero x = 12 e x = -3.

Possiamo riscrivere la nostre disequazione come (x -12)(x +3) > 0 e ottenere quindi che $x < -3 \lor x > 12$.



Incrociando queste soluzioni con le condizioni di esistenza vediamo che la soluzione alla disequazione irrazionale è $x < -3 \lor x > 12$.

<u>Risposta corretta</u>: D

28. Si risolva la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{x^2 - 9x} > 6$

A) $\forall\, x \in \mathbb{R}$

B) $x \leq 0 \lor x \geq 9$

C) $x \leq 0 \lor x > 12$

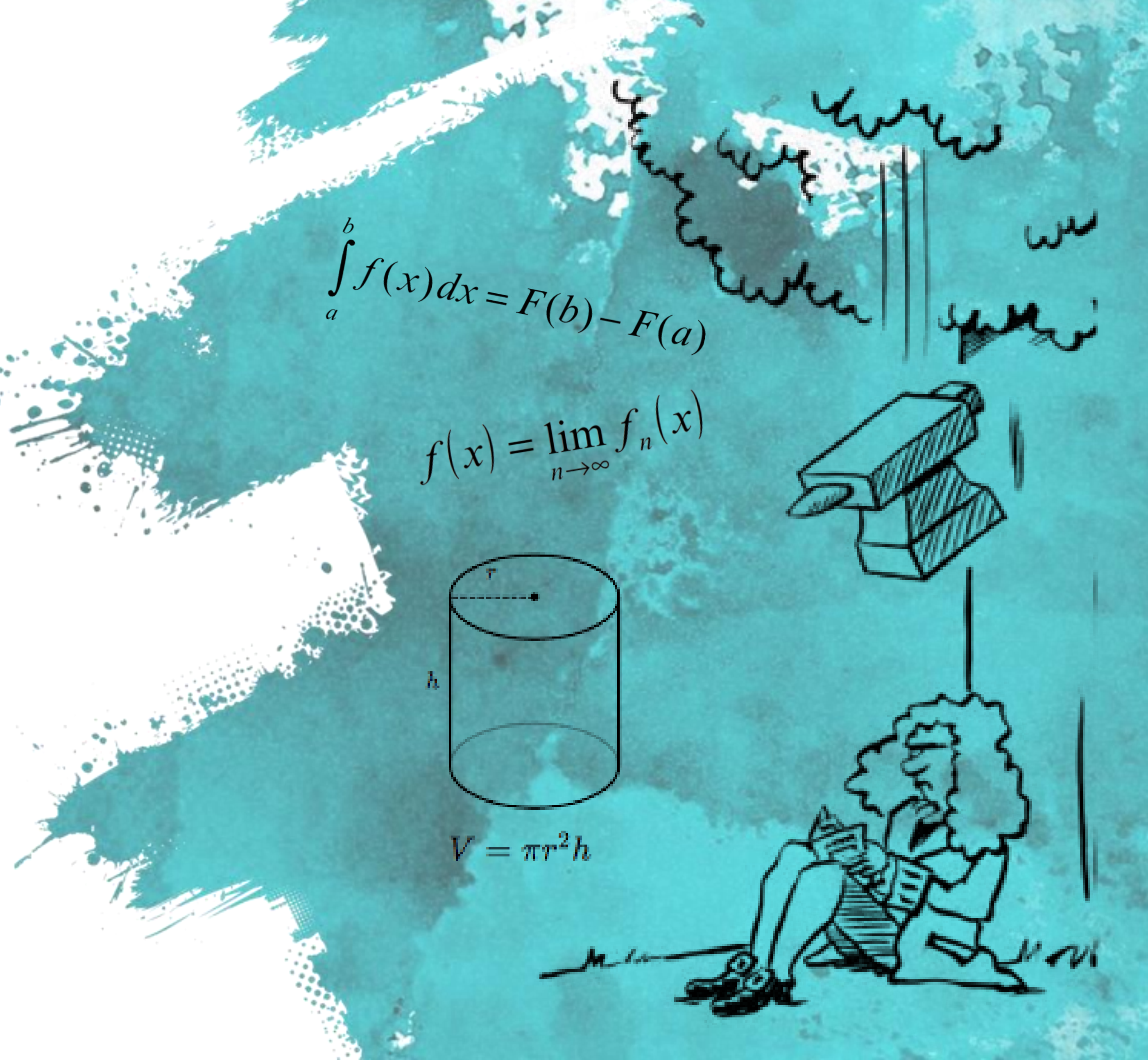
D) $\underline{x < -3 \lor x > 12}$

E) $x < -3 \lor x \geq 9$

Associazione Studenti e Professori di Medicina Uniti Per

Grazie per l’attenzione!

Alla prossima!



Studenti e Prof Uniti Per

@studentieprofunitiper

info@studentieprofunitiper.it