Corso di preparazione per l'esame di ammissione a medicina

Dr. Cristiano Fontana

Dipartimento di Fisica ed Astronomia "Galileo Galilei"
Università degli Studi di Padova

21 agosto 2017

Piacere!

Dr. Cristiano Fontana

- Ricercatore al Dipartimento di Fisica ed Astronomia "Galileo Galilei"
- Attività di ricerca:
  - Fisica applicata,
  - Sistemi di acquisizione dati.
- `http://www.pd.infn.it/~fontana/`

N.B.
Il carattere ˜ è una *tilde*, su windows si scrive con `alt+126`, su mac `alt+5`.

Indice

Grandezze fisiche
Richiami di matematica
Fisica del moto
Fluidi
Termodinamica
Elettromagnetismo

Indice

Grandezze fisiche
Richiami di matematica
Fisica del moto
Fluidi
Termodinamica
Elettromagnetismo

Unità di misura

Le misure delle *grandezze fisiche* sono espresse come un rapporto tra la quantià in esame e quella di un particolare campione omogeneo ad essa, detto *unità*.

Figura: Massa campione di 2 kg [wiki]

Figura: Campione di riferimento di 1 m [wiki]

Le unità fondamentali

Grandezza fisica	Nome	Simbolo
Intensità di corrente elettrica	ampere	A
Intensità luminosa	candela	cd
Lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	kg
Quantità di sostanza	mole	mol
Temperatura	kelvin	K
Intervallo di tempo	secondo	s

I prefissi del Sistema Internazionale

10^n	Prefisso	Simbolo
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	chilo	k
10^0		
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	µ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

Omogeneità delle grandezze

Le grandezze fisiche si possono sommare solo quando sono omogenee, ovvero quando hanno la stessa unità di misura.

$$\xcancel{1\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{kg}} = ??? \quad (1)$$

$$1\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{ft} = 1.6096\,\mathrm{m} \quad (2)$$

Grandezze fisiche derivate

Grandezze fondamentali

Sono indipendenti tra loro e non esprimibili come combinazioni di altre grandezze.

E.g.:

Lunghezza	m	[L]
Massa	kg	[M]
Tempo	s	[t]

Grandezze derivate

Sono definibili in termini delle grandezze fondamentali mediante prodotti, divisioni o potenze.

E.g.:

Superficie	m^2	$[L]^2$
Velocità	m/s	$[L][t]^{-1}$
Forza	N	$[M][L][t]^{-2}$

Funzioni e unità di misura

Quando si applica una funzione ad un numero con un'unità di misura, la funzione è applicata anche all'unità:

$$(2\,\mathrm{m})^2 = 4\,\mathrm{m}^2 \tag{3}$$

$$\sqrt{2\,\mathrm{m}\cdot 3\,\mathrm{m}} = \sqrt{6}\,\mathrm{m} \tag{4}$$

L'argomento di funzioni trascendenti (*i.e.* log, exp, funzioni trigonometriche...) deve essere per forza adimensionale:

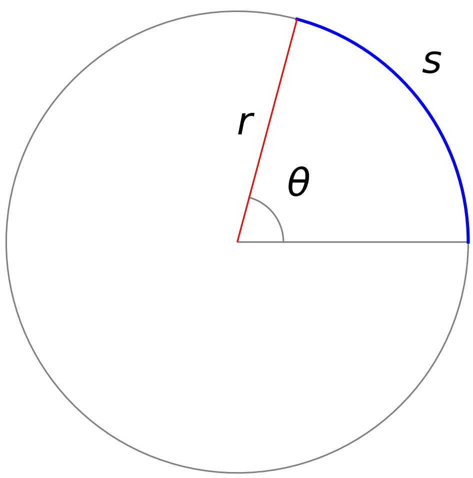
$$\mathrm{pH} = -\log_{10}\frac{[H_3O^+]}{C^0_{H^+}} \tag{5}$$

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6}$$

Un suggerimento...

Le unità di misura possono essere comode per controllare la correttezza dei vostri calcoli; se rimangono coerenti allora i vostri calcoli potrebbero essere giusti.

Misura degli angoli



Gli angoli sono misurati in *radianti* che sono definiti come il rapporto tra l'arco individuato dall'angolo ed il raggio della circonferenza:

$$\theta = \frac{s}{r} \tag{7}$$

$$\theta \in [0, 2\pi[\tag{8}$$

Essendo un rapporto tra lunghezze sono un numero puro:

$$[\theta] = \frac{[s]}{[r]} = \frac{[L]}{[L]} = 1 \tag{9}$$

ma convenzionalmente si parla di radianti.

Calcolo degli angoli

Angolo giro

Per un angolo di 360° l'arco è pari all'intera circonferenza:

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi \cdot r}{r} = 2\pi \qquad (10)$$

quindi per convertire un angolo in radianti:

$$[\text{rad}] = [°] \cdot \frac{\pi}{180} \qquad (11)$$

gradi	rad
0	0
30	$\frac{\pi}{6}$
45	$\frac{\pi}{4}$
60	$\frac{\pi}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$
180	π
360	2π

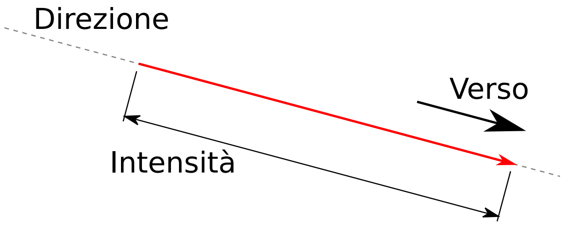
Grandezze scalari e vettoriali

Grandezze scalari

Sono grandezze definite solo da un numero che indica la loro quantità. Sono spesso associate ad un'unità di misura.

Grandezze vettoriali

Entità definite da intensità, direzione e verso. Anche loro possono essere associate ad un'unità di misura.

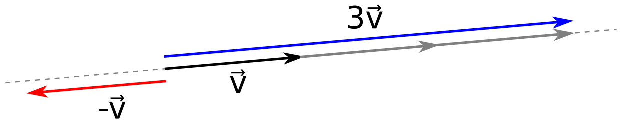


Operazioni coi vettori I

Moltiplicazione per uno scalare e somma

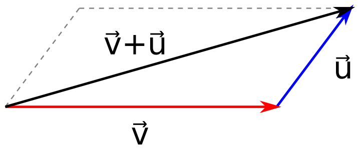
Moltiplicazione per uno scalare

Grandezze vettoriali possono essere moltiplicate per scalari.



Somma tra vettori

Grandezze vettoriali possono essere sommate tra di loro (metodi: del parallelogramma o punta-coda).



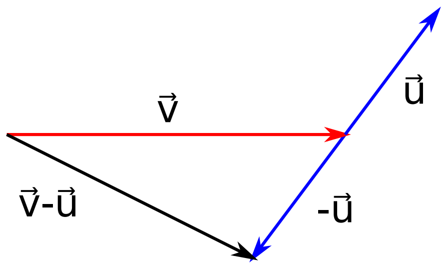
Operazioni coi vettori II

Differenza

Differenza tra vettori

Può essere vista come

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u}) \tag{12}$$



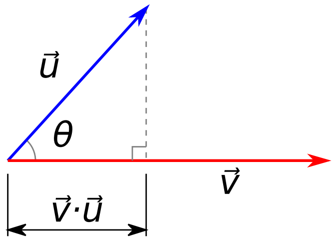
Operazioni coi vettori III

Prodotti tra vettori I

Prodotto scalare

Rappresenta la proiezione di un vettore su di un altro vettore, fornendo uno scalare.

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}|\,|\vec{u}| \cos\theta \tag{13}$$



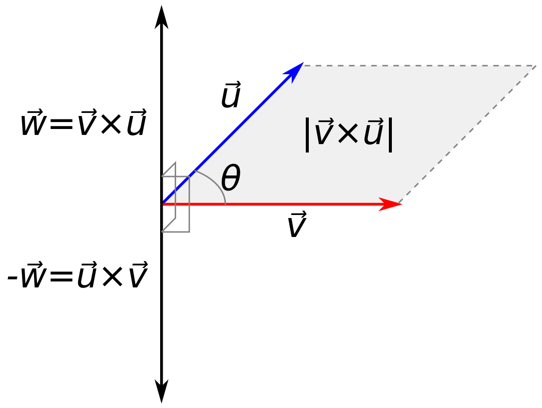
Operazioni coi vettori IV

Prodotti tra vettori II

Prodotto vettoriale

Fornisce un terzo vettore ortogonale ai due, il cui modulo è l'area del parallelogramma compreso.

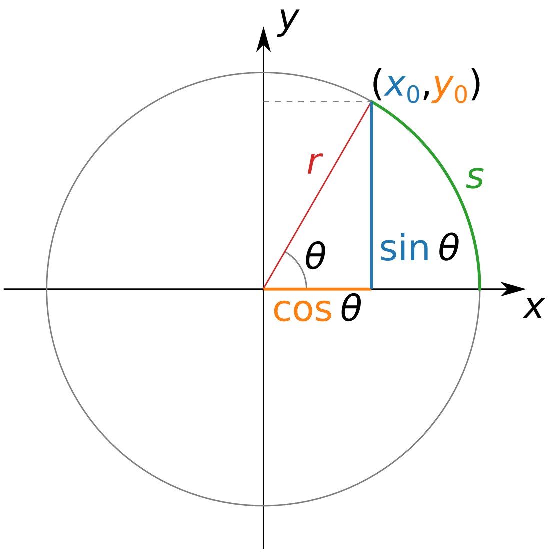
$$\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u}, \qquad |\vec{w}| = |\vec{v}|\,|\vec{u}| \sin\theta \tag{14}$$



Indice

Grandezze fisiche
Richiami di matematica
Fisica del moto
Fluidi
Termodinamica
Elettromagnetismo

Funzioni trigonometriche I



Le funzioni trigonometriche sono funzioni di un angolo, che mettono in relazione i lati di un triangolo rettangolo.

$$\cos\theta = \frac{x_0}{r} = \frac{\text{adiacente}}{\text{ipotenusa}} \tag{15}$$

$$\sin\theta = \frac{y_0}{r} = \frac{\text{opposto}}{\text{ipotenusa}} \tag{16}$$

$$\tan\theta = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{17}$$

Un suggerimento... Coseno e seno sono in ordine alfabetico come x e y.

Funzioni trigonometriche II

Valori notevoli

θ $^\circ$	θ rad	$\cos\theta$	$\sin\theta$
0	0	0	1
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$	0	1
180	π	-1	0
360	2π	1	0

Identità trigonometriche

`https://it.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A0_trigonometrica`

Proprietà delle potenze

Definizioni

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}} \tag{18}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \tag{19}$$

Valori notevoli

$$0^n = 0 \quad n \neq 0 \tag{20}$$

$$a^0 = 1 \quad a \neq 0 \tag{21}$$

$$0^0 = \text{indeterminata} \tag{22}$$

Potenze colla stessa base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{23}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \tag{24}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{25}$$

Potenze collo stesso esponente

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \tag{26}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{27}$$

Logaritmi

Definizioni

Il logaritmo è definito come la funzione inversa della potenza:

$$a^n = b \quad \Leftrightarrow \log_a b = n \tag{28}$$

ovvero

$$\log_a (a^n) = n. \tag{29}$$

È definito solo per $b > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Valori notevoli

$$\log_a 1 = 0 \tag{30}$$

$$\log_a a = 1 \tag{31}$$

Identità

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \tag{32}$$

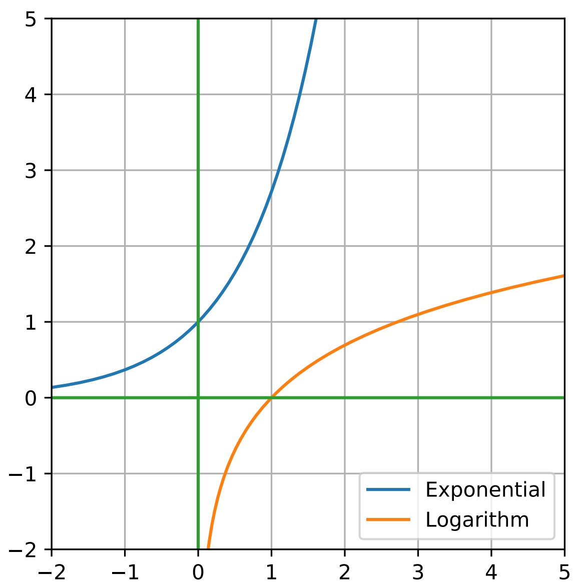
$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \tag{33}$$

$$y \cdot \log_a x = \log_a x^y \tag{34}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \log_a x = \log_a \sqrt[y]{x} \tag{35}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{36}$$

Funzione esponenziale e logaritmo naturale I



La *funzione esponenziale* è una particolare funzione molto importante, è definita come:

$$\exp(x) = e^x \tag{37}$$

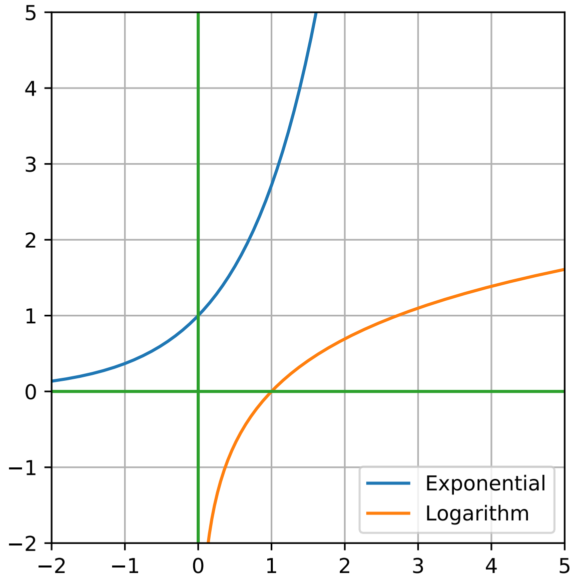
ove e è detto *numero di Nepero* e vale

$$e \approx 2.71828\ldots \tag{38}$$

La sua funzione inversa è il *logaritmo naturale*:

$$\log(e^x) = x. \tag{39}$$

Funzione esponenziale e logaritmo naturale II

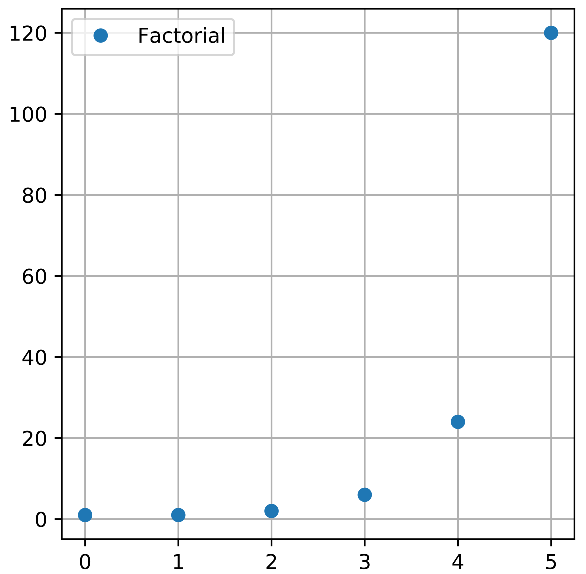


Proprietà dell'esponenziale

Ogni potenza può essere ricondotta all'esponenziale:

$$a^x = e^{x \cdot \log a} \tag{40}$$

Fattoriale



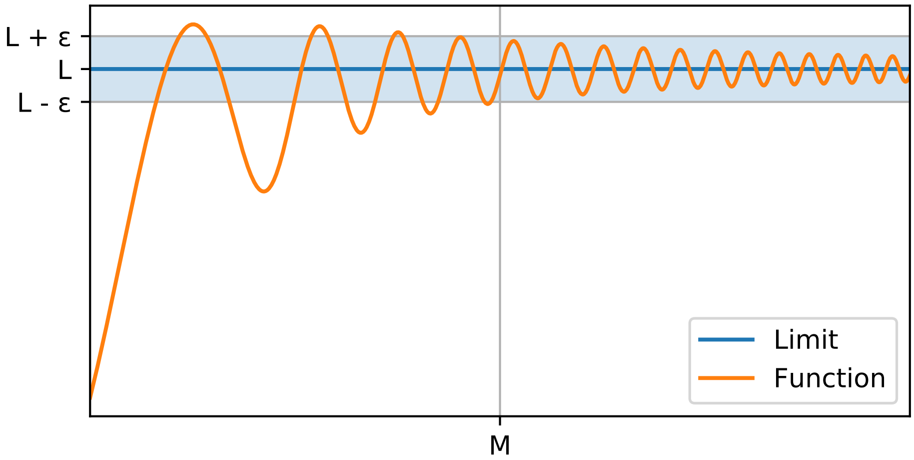
Il *fattoriale* di un numero è definito come

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \tag{41}$$

per sua natura è definito solo sui numeri naturali. Per convenzione si definisce anche

$$0! = 1. \tag{42}$$

Limiti

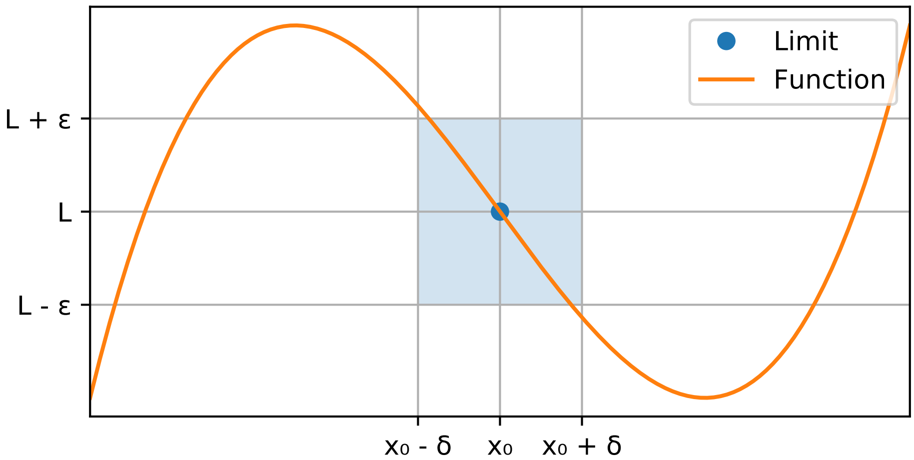


Un limite rappresenta un metodo di esprimere il valore a cui tende una funzione attorno ad un punto x_0, che può trovarsi anche all'infinito. Si indica colla notazione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \tag{43}$$

ove L può essere finito o infinito.

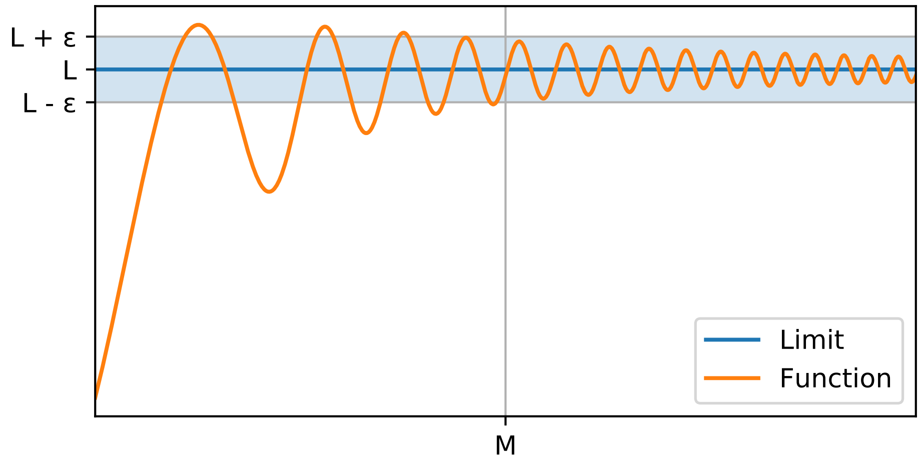
Limite finito attorno ad un punto finito



Formalmente si dice L è il limite di $f(\cdot)$ per x che tende a x_0, se per ogni $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$ esiste un $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - L| < \epsilon$; ovvero

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \tag{44}$$

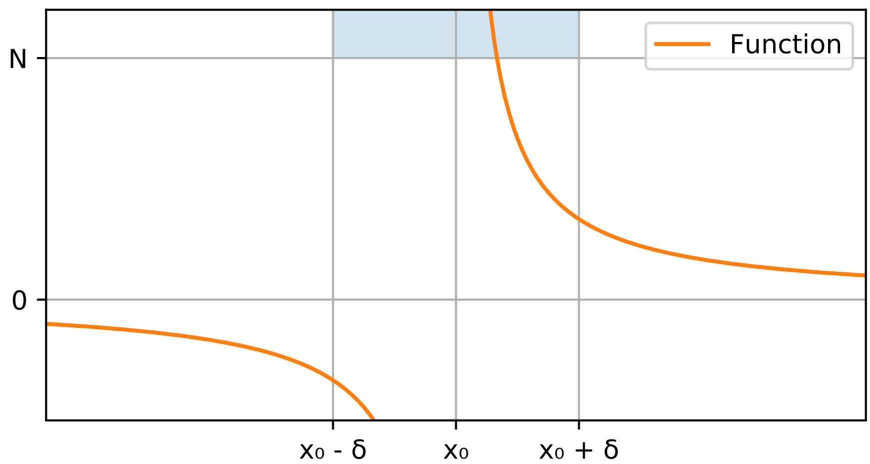
Limite finito all'infinito



Formalmente si dice L è il limite di $f(\cdot)$ per x che tende a ∞, se per ogni $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$ esiste un $M > 0$, $M \in \mathbb{R}$ tale che $M < x$ allora $|f(x) - L| < \epsilon$; ovvero

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \ \exists M > 0 : \ M < x \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \tag{45}$$

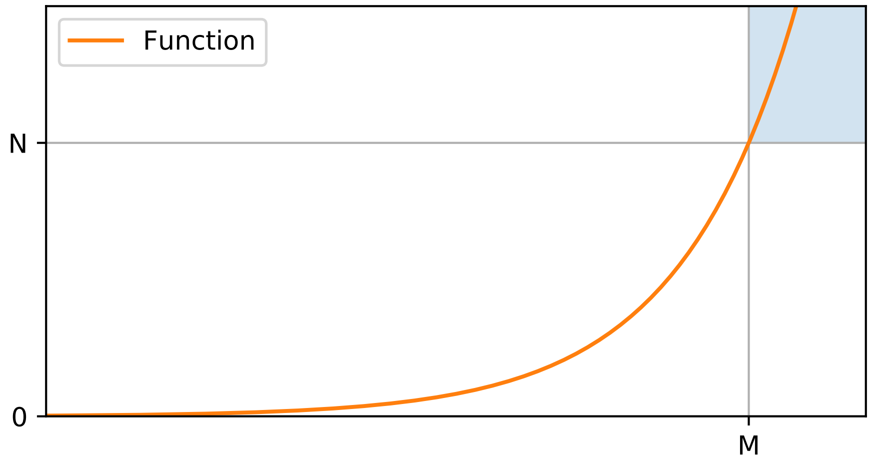
Limite infinito attorno ad un punto finito



Formalmente $f(\cdot)$ ha limite $+\infty$ per x che tende a x_0, se per ogni $N > 0$, $N \in \mathbb{R}$ esiste un $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ allora $N < f(x)$; ovvero

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall N > 0 \ \exists \delta > 0 : \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow N < f(x) \tag{46}$$

Limite infinito all'infinito



Formalmente $f(\cdot)$ ha limite $+\infty$ per x che tende a $+\infty$, se per ogni $N > 0$, $N \in \mathbb{R}$ esiste un $M > 0$, $M \in \mathbb{R}$ tale che $M < x$ allora $N < f(x)$; ovvero

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall N > 0 \; \exists M > 0 : \; M < x \Rightarrow N < f(x) \tag{47}$$

Calcolo di limiti

Dato

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_f \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = L_g \tag{48}$$

allora valgono:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = L_f \pm L_g \tag{49}$$

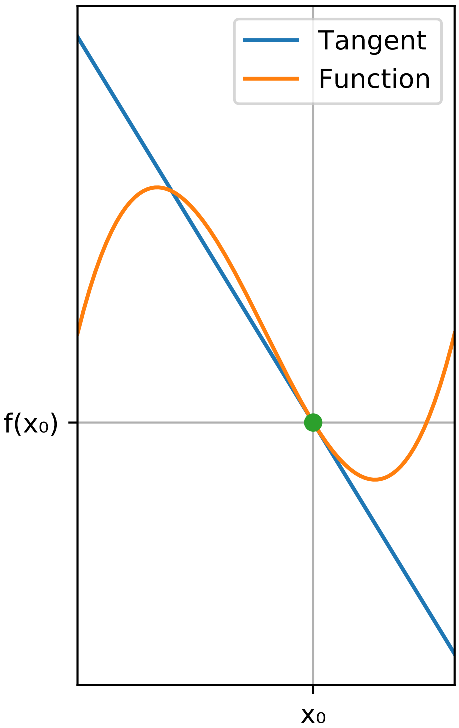
$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = L_f \cdot L_g \tag{50}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_f}{L_g} \qquad \text{se } L_g \neq 0 \tag{51}$$

Limiti notevoli e forme indeterminate

https://it.wikipedia.org/wiki/Limite_notevole
https://it.wikipedia.org/wiki/Forma_indeterminata

Derivata



La derivata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al punto considerato di una funzione, ovvero il tasso di variazione istantaneo della funzione. È definita tramite il limite del rapporto incrementale:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)}{\epsilon} \tag{52}$$

Calcolo di derivate

Le derivate sono applicazioni lineari e vale:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a \cdot f(x) = a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \tag{53}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[f(x) + g(x) \right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) \tag{54}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x) \tag{55}$$

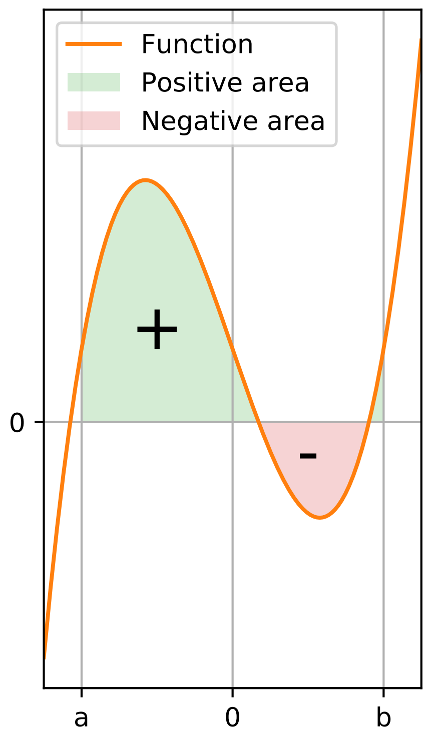
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \tag{56}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{57}$$

Regole di derivazione

https://it.wikipedia.org/wiki/Regole_di_derivazione

Integrale



L'integrazione è l'operazione inversa della derivazione.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) \tag{58}$$

$$F'(x) = f(x) \tag{59}$$

$$\tag{60}$$

La funzione $F(\cdot)$ è detta *primitiva* e, nel caso di funzioni ad una variabile, rappresenta l'area sottesa dal loro grafico:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{61}$$

$$\tag{62}$$

Calcolo di integrali

Gli integrali sono applicazioni lineari e vale:

$$\int a \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = a \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{63}$$

$$\int \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \tag{64}$$

$$\int f(x) g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{65}$$

Integrali comuni

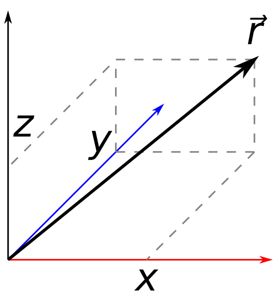
https://it.wikipedia.org/wiki/Tavola_degli_integrali_pi%C3%B9_comuni

Indice

Grandezze fisiche
Richiami di matematica
Fisica del moto
Fluidi
Termodinamica
Elettromagnetismo

Posizione

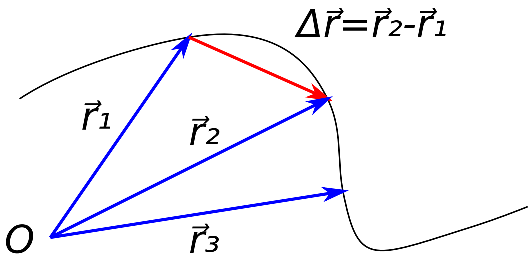
La posizione di un punto è una grandezza vettoriale (espressa per mezzo delle sue coordinate).



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{66}$$

Posizione e distanza

La distanza è una grandezza vettoriale?
No, è una grandezza scalare: è il modulo del vettore differenza tra due punti.



$$d = \left|\Delta\vec{r}\right| = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| \tag{67}$$

Velocità

È una grandezza vettoriale che indica il rapporto tra lo spazio percorso ed il tempo impiegato per percorrerlo.

Velocità media

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{68}$$

Velocità istantanea

Derivata della posizione in funzione del tempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{69}$$

Velocità

Analisi dimensionale

Essendo una grandezza derivata la sua unità di misura è espressa come una combinazione di altre unità fondamentali.

$$[v] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = \frac{[L]}{[t]} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{70}$$

Esempi:

- Limiti di velocità nel SI:

$$50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 1000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}} \cdot \frac{1}{3600\,\mathrm{s/h}} = \frac{50}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 13.9\,\mathrm{m/s} \tag{71}$$

- Velocità della luce nel vuoto:

$$3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot 0.001\,\mathrm{km/m} = 300\,000\,\mathrm{km/s} \tag{72}$$

Accelerazione

È la derivata seconda della posizione in funzione del tempo, ovvero la derivata della velocità in funzione del tempo.

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{73}$$

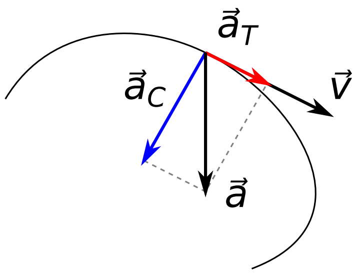
Direzione dell'accelerazione

L'accelerazione può avere una direzione qualunque ma può essere scomposta in due componenti:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{T}} + \vec{a}_{\mathrm{C}} \tag{74}$$

ove:

- $\vec{a}_{\mathrm{T}}$ è la componente tangenziale (parallela alla velocità) che rappresenta la variazione del modulo della velocità,
- $\vec{a}_{\mathrm{C}}$ è la componente perpendicolare alla velocità, che rappresenta la variazione della direzione della velocità. È spesso detta *accelerazione centripeta*.



Accelerazione

Analisi dimensionale

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{[v]}{[t]} = \frac{[L]}{[t^2]} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{75}$$

Esempi:

- Accelerazione di una Lamborghini (0-100 km/h in 2.5 s):

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100\,\mathrm{km/h}}{2.5\,\mathrm{s}} = \frac{100/3.6}{2.5}\,\mathrm{m/s^2} = 11.1\,\mathrm{m/s^2} \tag{76}$$

- Accelerazione di gravità:

$$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2} \tag{77}$$

Quantità di moto

La *quantità di moto* è una grandezza vettoriale definita come:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{78}$$

In generale per un sistema a più corpi:

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{79}$$

Analisi dimensionale:

$$[p] = [m][v] = [M]\frac{[L]}{[t]} = N \cdot s \tag{80}$$

Legge oraria

Un moto può essere descritto completamente dalla sua *legge oraria*, ovvero dalla relazione che lega la sua posizione al tempo trascorso.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{81}$$

Da cui è possibile ricavare le espressioni della velocità ed accelerazione, derivando le funzioni delle componenti:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} \tag{82}$$

Moto uniforme I

Un oggetto non soggetto ad accelerazioni si muove di *moto uniforme*. Per praticità, possiamo assumere che la direzione del moto sia l'asse x e possiamo considerare il moto come unidimensionale.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow r(t) = x(t) \tag{83}$$

Per ottenere $x(t)$ integriamo l'accelerazione:

$$a = 0 \tag{84}$$

$$v(t) = \int 0 \, \mathrm{d}t = v_0 \tag{85}$$

$$x(t) = \int v(t) \, \mathrm{d}t = \int v_0 \, \mathrm{d}t = v_0 \cdot t + x_0 \tag{86}$$

Moto uniforme II

Riassumiamo:

$$a = 0 \tag{87}$$

$$v(t) = v_0 \tag{88}$$

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0 \tag{89}$$

ove v_0 e x_0 sono costanti arbitrarie legate alle *condizioni iniziali*.

$$v(0) = v_0 \text{ (Velocità iniziale)} \tag{90}$$

$$x(0) = x_0 \text{ (Posizione iniziale)} \tag{91}$$

Moto uniformemente accelerato I

Un oggetto soggetto ad accelerazione costante si muove di *moto uniformemente accelerato*. Prendiamo in considerazione un moto con $\vec{a} \| \vec{v}_0$ e quindi unidimensionale.
Per ottenere $x(t)$ integriamo l'accelerazione:

$$a = a_0 \tag{92}$$

$$v(t) = \int a_0 \, \mathrm{d}t = a_0 t + v_0 \tag{93}$$

$$x(t) = \int v(t) \, \mathrm{d}t = \int a_0 t + v_0 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \tag{94}$$

Moto uniformemente accelerato II

Riassumiamo:

$$a = a_0 \tag{95}$$

$$v(t) = a_0 t + v_0 \tag{96}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \tag{97}$$

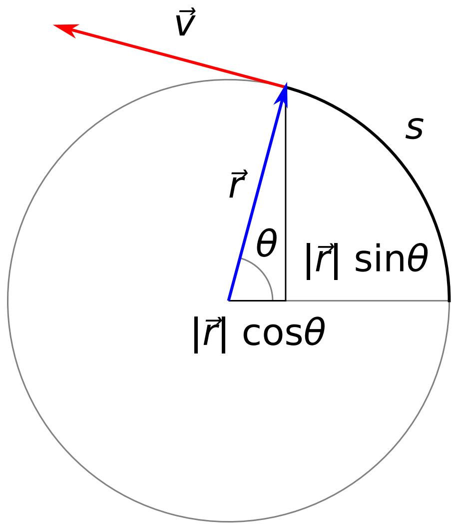
Esempi:

- Quanto spazio percorre la Lamborghini per arrivare a 100 km/h?

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{100\,\mathrm{km/h}}{11.1\,\mathrm{m/s^2}} = 2.5\,\mathrm{s} \tag{98}$$

$$x(\Delta t) = \frac{1}{2} a \Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot 11.1\,\mathrm{m/s^2} \cdot (2.5\,\mathrm{s})^2 = 34.7\,\mathrm{m} \tag{99}$$

Moto circolare



L'angolo è percorso con una velocità detta *angolare*:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{100}$$

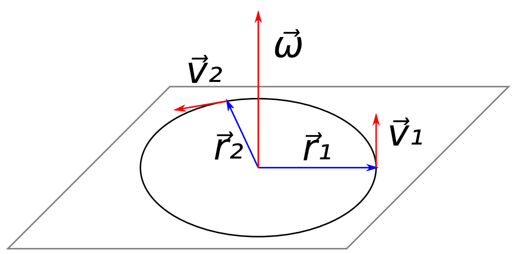
Lo spazio percorso lungo l'arco s è dato da

$$s = \Delta\theta \cdot r = \omega t \cdot r \tag{101}$$

La posizione è determinata solo dall'angolo percorso.

$$x = |\vec{r}| \cos(\omega t) \tag{102}$$
$$y = |\vec{r}| \sin(\omega t) \tag{103}$$

Velocità angolare



La velocità angolare è una grandezza vettoriale perpendicolare al piano del moto. Soddisfa le relazioni:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{104}$$
$$v = \omega \cdot r \tag{105}$$

Se il moto è uniforme allora

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{106}$$

ove T è il periodo di rotazione e f la frequenza.

Moto rotatorio

Analisi dimensionale

$$[\theta] = \frac{[L]}{[L]} = 1 \tag{107}$$

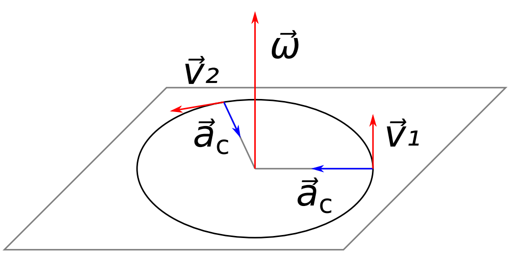
$$[\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = \frac{1}{[t]} = \frac{1}{\text{s}} \tag{108}$$

$$[f] = [\omega] = \frac{1}{[t]} = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz} \tag{109}$$

$$[T] = \frac{1}{[\omega]} = [t] = \text{s} \tag{110}$$

Accelerazione centripeta

Moto rotatorio



Ciò che fa curvare la traiettoria è l'*accelerazione centripeta*. Che è sempre perpendicolare alla velocità.

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r} \tag{111}$$

$$|\vec{a}_c| = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r} \tag{112}$$

Una centrifuga per provette da laboratorio ha $r = 15\,\mathrm{cm}$ e frequenza massima $f = 4000/\mathrm{min}$. Calcolare la velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta.

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi\ 4000/\mathrm{min}\ \frac{1}{60\,\mathrm{s/min}} = 419\,1/\mathrm{s} \tag{113}$$

$$v = \omega \cdot r = 419\,1/\mathrm{s}\ 15\,\mathrm{cm}\ 0.01\,\mathrm{m/cm} = 62.8\,\mathrm{m/s} = 226\,\mathrm{km/h} \tag{114}$$

$$a_\mathrm{c} = \omega^2 \cdot r = (419\,1/\mathrm{s})^2\ 0.15\,\mathrm{m} = 26\,320\,\mathrm{m/s^2} = 2686 \cdot g \tag{115}$$

Princìpi della dinamica

1. **Principio d'inerzia**: In assenza di forze esterne un corpo mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{116}$$

2. L'accelerazione subita da un corpo è proporzionale alla somma delle forze che agiscono su di esso:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{117}$$

3. **Principio di azione e reazione**: Se un corpo A applica una forza $\vec{F}$ su di un corpo B, allora B applica una forza $-\vec{F}$ sul corpo A.

$$\vec{F}_\mathrm{AB} = -\vec{F}_\mathrm{BA} \tag{118}$$

Forza

Analisi dimensionale

$$[F] = [m][a] = [M]\frac{[L]}{[t^2]} = N \text{ (Newton)} \tag{119}$$

Secondo principio e quantità di moto

In generale il *secondo principio* può essere scritto come:

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \tag{120}$$

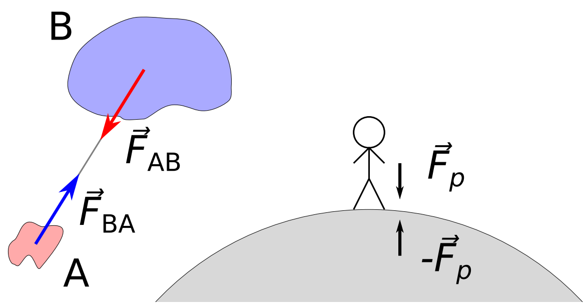
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\vec{v}\right) \tag{121}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{122}$$

Questa formula è valida per sistemi a massa costante.

Principio di azione e reazione I

Se $\vec{F}_{\mathrm{AB}} = -\vec{F}_{\mathrm{BA}}$ allora il modulo delle forze deve essere lo stesso, indipendentemente dalla forma o dimensione dei corpi.



Principio di azione e reazione II

Accelerazione subita

Calcoliamo le accelerazioni associate ad A e B:

$$\vec{F}_{\mathrm{BA}} = m_{\mathrm{A}}\vec{a}_{\mathrm{A}} \qquad \vec{F}_{\mathrm{AB}} = m_{\mathrm{B}}\vec{a}_{\mathrm{B}} \tag{123}$$

Il loro rapporto diventa:

$$\frac{|\vec{a}_{\mathrm{A}}|}{|\vec{a}_{\mathrm{B}}|} = \frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}} \tag{124}$$

quindi se $m_{\mathrm{A}} \gg m_{\mathrm{B}}$ il rapporto diventa molto piccolo, ovvero la massa A subirà un'accelerazione trascurabile.

Conservazione della quantità di moto

Possiamo riscrivere il *principio di azione e reazione* in termini della quantità di moto. Ipotizziamo di avere due corpi interagenti: A e B

$$\vec{F}_{\mathrm{AB}} = -\vec{F}_{\mathrm{BA}} \tag{125}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} \tag{126}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} \tag{127}$$

ricordando che la derivazione è un'operazione lineare si ottiene:

$$0 = \frac{\mathrm{d}\left(\vec{p}_{\mathrm{B}} + \vec{p}_{\mathrm{A}}\right)}{\mathrm{d}t} \tag{128}$$

ovvero la quantità di moto totale non varia e quindi si conserva.

Esempio di conservazione di $\vec{p}$

Un'aquila cattura in volo un piccione, dopo la cattura prosegue il suo volo tenendo saldamente la preda. L'aquila è di massa $M = 2\,\mathrm{kg}$ e vola con una velocità $V = 50\,\mathrm{km/h}$. Il piccione è di massa $m = 300\,\mathrm{g}$ e vola con velocità $v = 20\,\mathrm{km/h}$. Le velocità iniziali relative hanno la stessa direzione ma verso opposto. La velocità nell'istante successivo alla cattura è?

Questo è un urto completamente anelastico, ovvero i due corpi si uniscono nell'urto e proseguono insieme. Conserviamo la quantità di moto:

$$\vec{p}_{\mathrm{i}} = \vec{p}_{\mathrm{f}} \tag{129}$$

$$M\vec{V} + m\vec{v} = (M+m)\vec{v}\,' \tag{130}$$

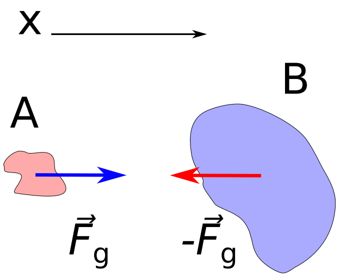
restringendoci sulla direzione della velocità si ottiene

$$(M+m)v' = MV - mv \tag{131}$$

$$v' = \frac{MV - mv}{M+m} = \frac{2\,\mathrm{kg}\cdot 50\,\mathrm{km/h} - 0.300\,\mathrm{kg}\cdot 20\,\mathrm{km/h}}{2\,\mathrm{kg} + 0.300\,\mathrm{kg}} \tag{132}$$

$$= 40.9\,\mathrm{km/h} \tag{133}$$

Forza di gravità I



Ogni oggetto massivo attrae gli altri oggetti massivi (e viceversa), questa forza è detta di *gravità*.

$$\vec{F}_g = (-)\frac{G m_A m_B}{r^3}\vec{r} \qquad (134)$$

$$= (-)\frac{G m_A m_B}{r^2}\vec{u} \qquad (135)$$

La direzione è lungo la congiungente dei centri di massa dei due corpi. Il segno nella formula dipende dal sistema di riferimento.

Forza di gravità II

Sulla superficie di un pianeta

Il raggio della Terra è mediamente $R = 6.4 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ quindi $R \gg \Delta h$, ove Δh è la scala di altezze della nostra quotidianità. La forza di gravità a cui siamo soggetti ad una distanza dal centro della terra di $r = R + \Delta h$ è

$$F_g = \frac{GMm}{(R+\Delta h)^2} \approx \frac{GMm}{R^2} = \left(\frac{GM}{R^2}\right) m \qquad (136)$$

Definiamo $g = \frac{GM}{R^2}$ e calcoliamone il valore:

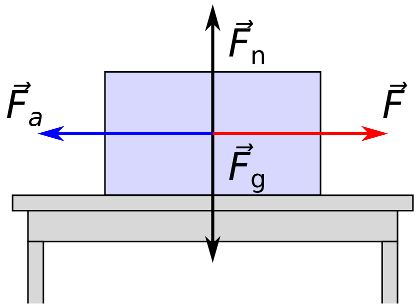
$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6.4 \cdot 10^6\,\mathrm{m}} = 9.72\,\mathrm{m/s^2} \qquad (137)$$

Quindi sulla superficie della Terra la forza di gravità è:

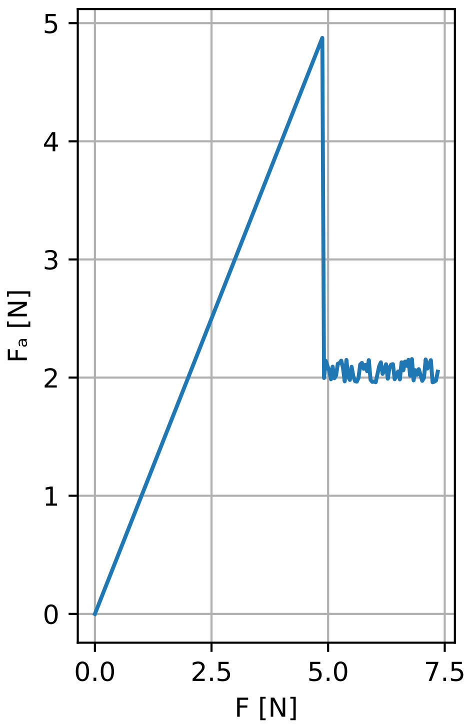
$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad (138)$$

Forza di attrito

L'esperienza quotidiana ci mostra che si deve applicare una forza per mantenere gli oggetti in movimento a velocità costante: perché si deve compensare la *forza di attrito*. Nel caso di oggetti posti a contatto, la forza di attrito dipende dalle due superfici a contatto.



Forza di attrito radente I



$$\mu_S > \mu_D \qquad (139)$$

Attrito statico

$$\left|\vec{F}_S\right| \leq \mu_S \left|\vec{F}_\perp\right| \qquad (140)$$

ove μ_S è detto *coefficiente d'attrito statico*: numero puro tipicamente minore di 1.

Attrito dinamico

$$\left|\vec{F}_D\right| = \mu_D \left|\vec{F}_\perp\right| \qquad (141)$$

ove μ_D è detto *coefficiente d'attrito dinamico*: numero puro tipicamente minore di 1.

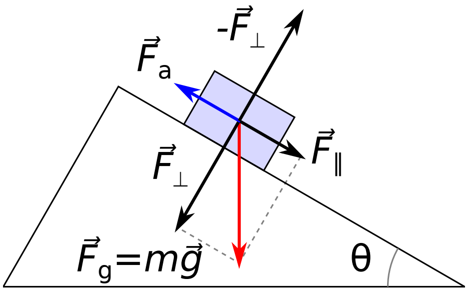
Forza di attrito radente II

Mostra le seguenti proprietà fondamentali:

- è indipendente dall'area di contatto;
- è indipendente dalla velocità dell'oggetto;
- ha stessa direzione della componente della forza parallela al piano, ma verso opposto.

Forza di attrito

Esempio del piano inclinato



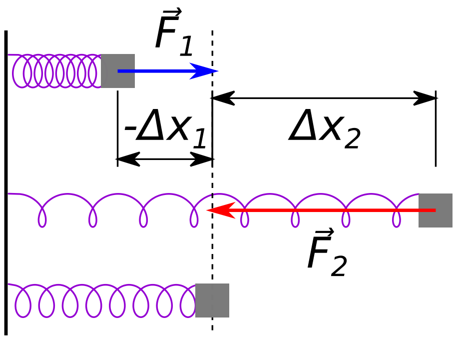
Nel caso di un piano inclinato abbiamo

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \tag{142}$$
$$F_\perp = mg\cos\theta \tag{143}$$
$$F_\parallel = mg\sin\theta \tag{144}$$
$$F_a \leq \mu_S mg\cos\theta \tag{145}$$

Qual è il valore dell'angolo limite perché il blocco sia in equilibrio?

$$mg\sin\theta \leq \mu_S mg\cos\theta \tag{146}$$
$$\Downarrow$$
$$\mu_S \geq \tan\theta \tag{147}$$

Forza elastica



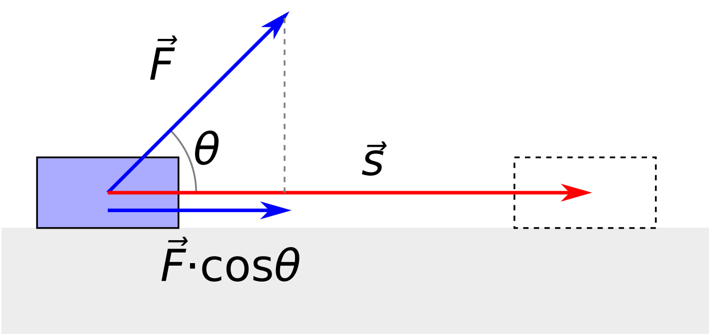
È la forza esercitata da una molla sui punti a cui essa è vincolata. Dipende dall'elongazione della molla.

$$\vec{F} = -k\vec{x} \tag{148}$$

Che unità di misura ha k?

$$[k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{N}{m} \tag{149}$$

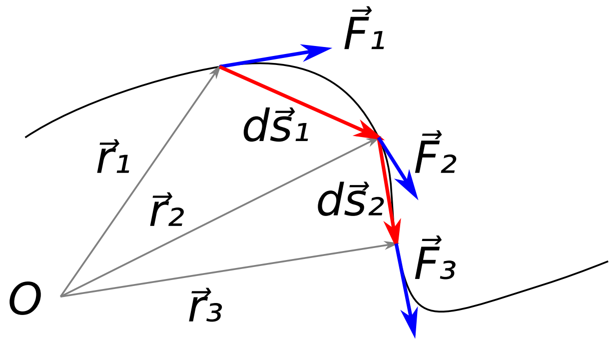
Lavoro I



Si definisce *lavoro* il prodotto tra una forza $\vec{F}$ e lo spostamento $\vec{s}$ ad essa associato:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\theta \tag{150}$$

Lavoro II



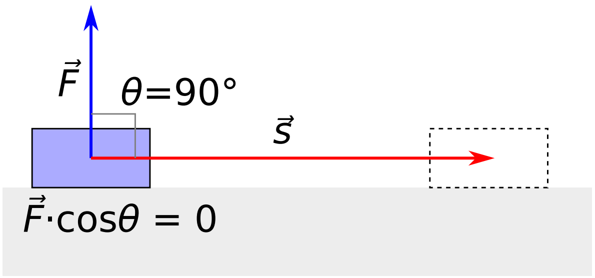
Nel caso in cui la forza sia variabile e/o lo spostamento non sia rettilineo si deve calcolare il lavoro infinitesimo fatto lungo uno spostamento infinitesimo

$$dW = \lim_{\vec{s}\to 0} \vec{F} \cdot \vec{s} = \vec{F} \cdot d\vec{s}. \qquad (151)$$

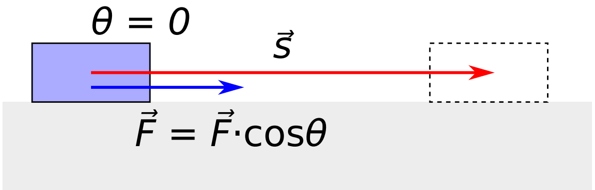
Per ottenere il valore finito deve essere integrato tra la posizione iniziale $\vec{s}_i$ e quella finale $\vec{s}_f$ dello spostamento:

$$W = \int_{\vec{s}_i}^{\vec{s}_f} dW = \int_{\vec{s}_i}^{\vec{s}_f} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \qquad (152)$$

Lavoro III



Il lavoro è massimo se la forza è parallela allo spostamento.
Una forza perpendicolare allo spostamento non compie lavoro!



Lavoro IV

Analisi dimensionale

L'unità di misura del lavoro è chiamata *Joule*:

$$[W] = N \cdot m = [M]\frac{[L]}{[t]^2} \cdot [L] = \frac{[M][L]^2}{[t]^2} = J \tag{153}$$

Delle unità di misura alternative comunemente utilizzate sono:

Caloria	$1\,\text{cal} = 4.184\,\text{J}$
Electronvolt	$1\,\text{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$

Energia cinetica I

Calcoliamo il lavoro fatto su un oggetto in movimento

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{s} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \vec{v} \cdot d\vec{p} = \vec{v} \cdot d\left(m\vec{v}\right) \tag{154}$$

Ricordando la regola di derivazione del prodotto

$$d\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \left(d\vec{v}\right) \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \left(d\vec{v}\right) = 2\,\vec{v} \cdot d\vec{v}. \tag{155}$$

Assumendo che la massa sia costante, abbiamo

$$dW = \vec{v} \cdot d\left(m\vec{v}\right) = m\,\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{m}{2} d\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \frac{m}{2} d\left(v^2\right) \tag{156}$$

Energia cinetica II

Integrando otteniamo

$$W = \int_{\vec{s}_i}^{\vec{s}_f} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{m}{2} \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} d\left(v^2\right) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \tag{157}$$

Definendo l'*energia cinetica* come

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \tag{158}$$

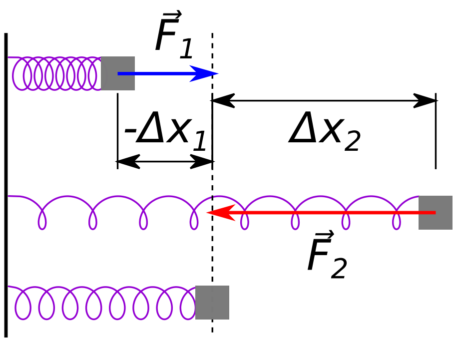
otteniamo il risultato

$$W = \Delta E_k \tag{159}$$

Che dipende solamente dai valori iniziali e finali della velocità.
Analisi dimensionale:

$$[E_k] = \text{kg} \cdot \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]^2 = \frac{[M][L]^2}{[t]^2} = J \tag{160}$$

Energia potenziale elastica



Calcoliamo il lavoro compiuto per elongare una molla

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F \, dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x \, dx \tag{161}$$

$$= -\frac{k}{2} \left[x^2\right]_{x_i}^{x_f} = -\frac{1}{2} k x_f^2 - \frac{1}{2} k x_i^2 \tag{162}$$

Definendo l'*energia potenziale elastica* come

$$U_e = \frac{1}{2} k x^2 \tag{163}$$

otteniamo il risultato

$$W = -\Delta U_e \tag{164}$$

Energia potenziale gravitazionale I

Sulla superficie della Terra

Ricordiamo che il raggio della Terra è mediamente $R_L = 6.4 \cdot 10^6$ m e che $R_L \gg \Delta h$, ove Δh è la scala di altezze della nostra quotidianità. La forza di gravità a cui siamo soggetti ad una distanza dal centro della terra di $r = R_L + \Delta h$ è

$$F_\mathrm{g} = \frac{GMm}{(R_L + \Delta h)^2} \approx \frac{GMm}{R_L^2} = \left(\frac{GM}{R_L^2}\right) m = gm \tag{165}$$

L'energia potenziale è il lavoro fatto per vincere la forza gravitazionale

$$\mathrm{d}U_\mathrm{g} = -\mathrm{d}W \tag{166}$$

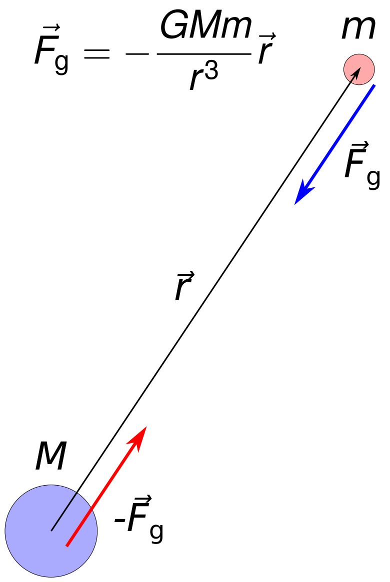
$$\mathrm{d}U_\mathrm{g} = -\vec{F}_\mathrm{g} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{167}$$

$$\Delta U_\mathrm{g} = -\int_{h_i}^{h_f} (-mg)\,\mathrm{d}z = mg\Delta h \tag{168}$$

Energia potenziale gravitazionale II

A grandi distanze

$$\vec{F}_\mathrm{g} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$$



Nel caso di masse puntiformi (o a grande distanza) l'energia potenziale è il lavoro fatto contro la forza per portare una massa da ∞ ad r.

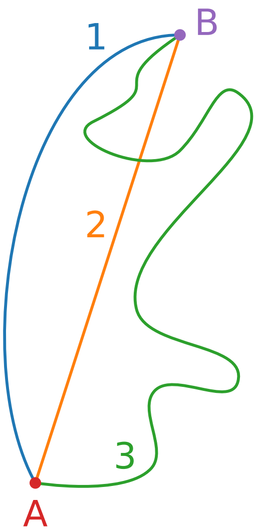
$$W = \int_\infty^{r_0} \left(-\frac{GMm}{r^3}\right) \vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{169}$$

$$= -GMm \int_\infty^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \tag{170}$$

$$= \left[\frac{GMm}{r}\right]_\infty^{r_0} = \frac{GMm}{r_0} \tag{171}$$

$$U(r_0) = -\frac{GMm}{r_0} \tag{172}$$

Forze conservative I



Abbiamo definito l'energia del campo gravitazionale come un'*energia potenziale* perché non dipende dal cammino d'integrazione. Questo risultato è valido per altre forze? In generale no, ma le forze per qui questo è vero sono dette *forze conservative*.

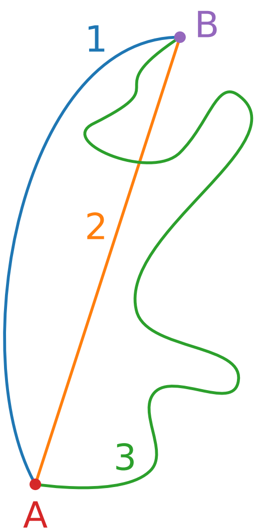
Forza conservativa

È un forza il cui lavoro lungo un processo non dipendere dal particolare cammino percorso ma solo dai punti di partenza ed arrivo.

Esempi:

- Forza di Newton,
- Forza elastica,
- Forza di Coulomb.

Forze conservative II



$$W_1^{A\to B} = \int_{\text{cammino 1}} \vec{F}\cdot d\vec{s} \tag{173}$$

$$W_2^{A\to B} = \int_{\text{cammino 2}} \vec{F}\cdot d\vec{s} \tag{174}$$

$$W_3^{A\to B} = \int_{\text{cammino 3}} \vec{F}\cdot d\vec{s} \tag{175}$$

se $\vec{F}$ è conservativa allora

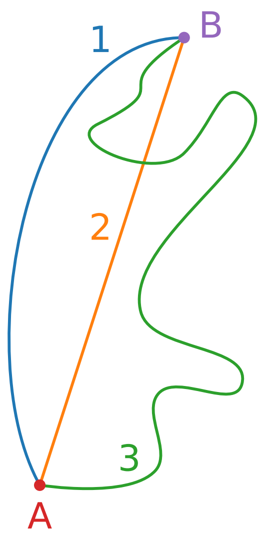
$$W_1^{A\to B} = W_2^{A\to B} = W_3^{A\to B} \tag{176}$$

in particolare lungo un cammino chiuso il lavoro è nullo

$$W^{A\to A} = W_1^{A\to B} + W_2^{B\to A} \tag{177}$$

$$= W_1^{A\to B} - W_2^{B\to A} = 0 \tag{178}$$

Forze conservative III



Se il lavoro compiuto non dipende dal cammino allora possiamo associare alla forza presa in esame un'*energia potenziale* che dipenda solo dalla posizione. Per convenzione allora si definisce l'energia potenziale in modo tale da avere la relazione:

$$W_{A \to B} = -(U_B - U_A) = -\Delta U \qquad (179)$$

Principio di conservazione dell'energia I

Restringendoci al caso di una forza conservativa abbiamo che valgono le due relazioni:

$$W = \Delta E_{\mathrm{k}} \qquad (180)$$

$$W = -\Delta U \qquad (181)$$

la prima è valida in generale, la seconda solo per una forza conservativa. Eguagliandole otteniamo:

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = -\Delta U \qquad (182)$$

$$E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{B}} - E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{A}} = U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}} \qquad (183)$$

$$E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{A}} + U_{\mathrm{A}} = E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{B}} + U_{\mathrm{B}} \qquad (184)$$

ovvero la somma tra energia cinetica e potenziale si conserva.

Principio di conservazione dell'energia II

Definendo l'*energia totale* (o meccanica) come

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{k}}^{\text{A}} + U_{\text{A}} \tag{185}$$

abbiamo che durante un moto questa è conservata dalle forze dette conservative.

Potenza I

La quantità di lavoro fatta nell'unità di tempo è detta *potenza*.

Potenza media

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{186}$$

Potenza istantanea

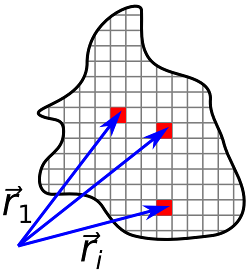
$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{187}$$

L'unità di misura della potenza è chiamata *Watt*:

$$[P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{[M][L]^2}{[t]^3} = W \tag{188}$$

Centro di massa

Figura: Galassia NGC 1300 [wiki].



Il *centro di massa*, o anche *baricentro*, rappresenta il valore medio della distribuzione della massa di un corpo. Per un sistema di corpi massivi è definito come:

$$\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{189}$$

Momento angolare

Il *momento angolare* è una quantità vettoriale definita come:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \left(\vec{r} \times \vec{v} \right) \tag{190}$$

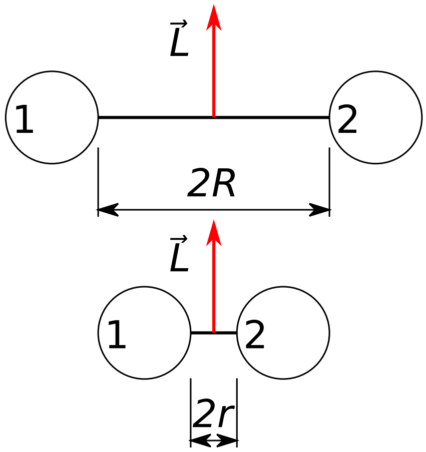
In generale per un sistema a più corpi:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{191}$$

Analisi dimensionale:

$$[L] = [r][p] = N \cdot s \cdot m \tag{192}$$

Conservazione del momento angolare



Il *momento angolare* è una quantità conservata, come la quantità di moto. Immaginiamo di avere un sistema di due corpi identici, collegati da una fune, che ruotano.

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \tag{193}$$

$$L = Rm_1 v_1 + Rm_2 v_2 \tag{194}$$

$$= mR^2\omega + mR^2\omega = 2mR^2\omega \tag{195}$$

Se la corda cambia lunghezza

$$L = 2mr^2\Omega \tag{196}$$

$$\Omega = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \omega \tag{197}$$

Momento delle forze

Calcoliamo la derivata del momento angolare:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) \tag{198}$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{199}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \vec{F} \tag{200}$$

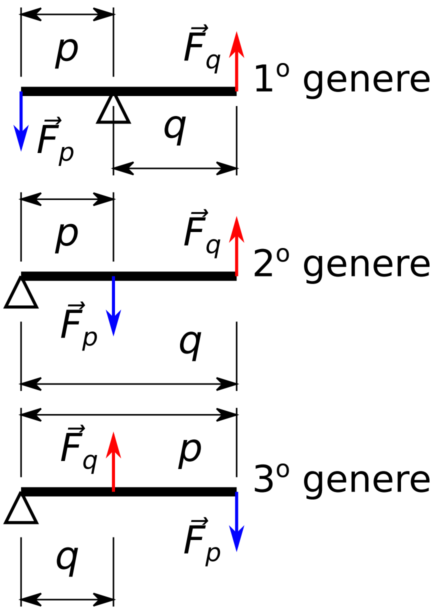
$$= \vec{r} \times \vec{F} \tag{201}$$

$$= \vec{\tau}, \tag{202}$$

che è chiamata *momento delle forze*.

$$[\tau] = [r][F] = N \cdot m \tag{203}$$

Leve



Usando il momento delle forze è molto semplice schematizzare il funzionamento delle leve.

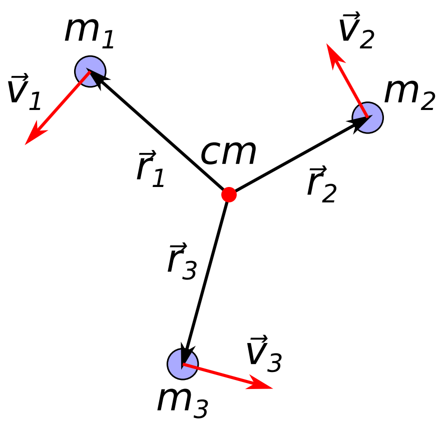
$$\vec{\tau}_{tot} = \vec{\tau}_p + \vec{\tau}_q \tag{204}$$

$$\tau_{tot} = p\left|\vec{F}_p\right| + q\left|\vec{F}_q\right| \tag{205}$$

Se $\vec{\tau}_{tot} = 0$ allora il sistema è in equilibrio e

$$\frac{q}{p} = \frac{\left|\vec{F}_p\right|}{\left|\vec{F}_q\right|} \tag{206}$$

Momento d'inerzia I



Calcoliamo il momento angolare di un sistema di corpi

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \tag{207}$$

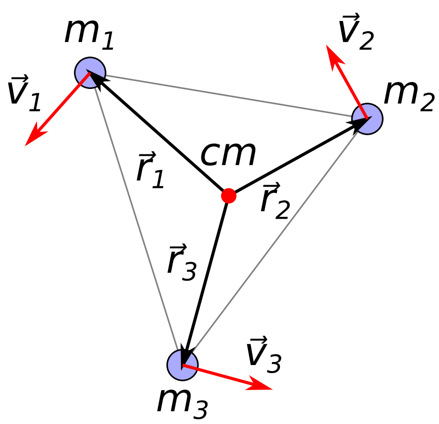
$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i) \tag{208}$$

$$= \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega}_i = \sum_i I_i \vec{\omega}_i \tag{209}$$

ove $I_i = m_i r_i^2$ si chiama *momento d'inerzia* ed abbiamo usato l'identità [ref]:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \tag{210}$$

Momento d'inerzia II



Se i corpi sono vincolati tra di loro si ha quello che si chiama un *corpo rigido*. In questo caso si ha:

$$\forall i \; \vec{\omega}_i = \vec{\omega} \tag{211}$$

e quindi:

$$\vec{L} = \sum_i I_i \vec{\omega}_i \tag{212}$$

$$= \left(\sum_i I_i \right) \vec{\omega} = I \vec{\omega} \tag{213}$$

ove il *momento d'inerzia* per un corpo rigido è

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{214}$$

Momento d'inerzia III

Nel caso di corpi estesi si usa un integrale per il calcolo del momento d'inerzia. È molto importante l'asse di rotazione.

$$I = MR^2 \qquad \text{anello di raggio } R\text{, asse } \perp \text{ attorno al centro} \tag{215}$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \qquad \text{cilindro di raggio } R\text{, asse } \perp \text{ attorno al centro} \tag{216}$$

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \qquad \text{sfera di raggio } R\text{, asse attorno al centro} \tag{217}$$

$$I = \frac{1}{12} ML^2 \qquad \text{un'asta lunga } L\text{, asse } \perp \text{ attorno al centro} \tag{218}$$

$$I = \frac{1}{3} ML^2 \qquad \text{un'asta lunga } L \text{ attorno ad un estremo} \tag{219}$$

`http://ebook.scuola.zanichelli.it/mandoliniparole/download/il-momento-di-inerzia`
`http://people.unica.it/nicolapintus/files/2013/10/elenco-momenti-di-inerzia.pdf`

Accelerazione angolare

Avendo definito il momento d'inerzia possiamo cercarne la relazione col momento delle forze

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \tag{220}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I\vec{\omega}\right) \tag{221}$$

$$= I\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{222}$$

$$= I\vec{\alpha} \tag{223}$$

ove $\vec{\alpha}$ è l'*accelerazione angolare*.

Energia cinetica rotazionale

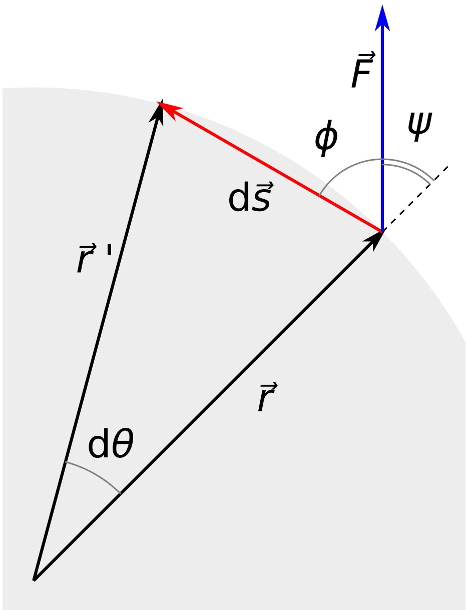
$$E_\mathrm{k} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{224}$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \tag{225}$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 \tag{226}$$

$$= \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{227}$$

Lavoro rotazionale



Calcoliamo il lavoro per un moto rotazionale

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = Fr\cos\phi\, d\theta \quad (228)$$

per $d\vec{s}$ molto piccolo si ha che $d\vec{s} \perp \vec{r}$ e

$$\frac{\pi}{2} = \phi + \psi \quad \Rightarrow \quad \cos\phi = \sin\psi \quad (229)$$

quindi

$$Fr\cos\phi = Fr\sin\psi = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| \quad (230)$$

si ottiene

$$dW = |\vec{\tau}|\, d\theta \quad (231)$$

Potenza rotazionale

Ricordiamo la definizione della potenza:

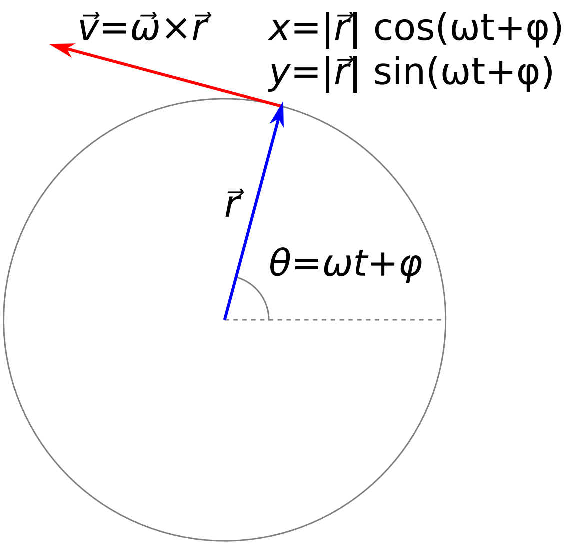
$$P = \frac{dW}{dt} = |\vec{\tau}|\frac{d\theta}{dt} \quad (232)$$

$$= \vec{\tau} \cdot \vec{\omega} \quad (233)$$

Analogia tra moto lineare e rotazionale

	Lineare	Rotazionale
Spostamento	$\vec{x}$	θ
Velocità	$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$	$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$
Accelerazione	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Massa	m	$I = \sum_i m_i r_i^2$
Quantità di moto	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Energia cinetica	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
II principio	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
Potenza	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$

Moto armonico I



Nel caso di un moto rotatorio uniforme con velocità angolare ω si ha

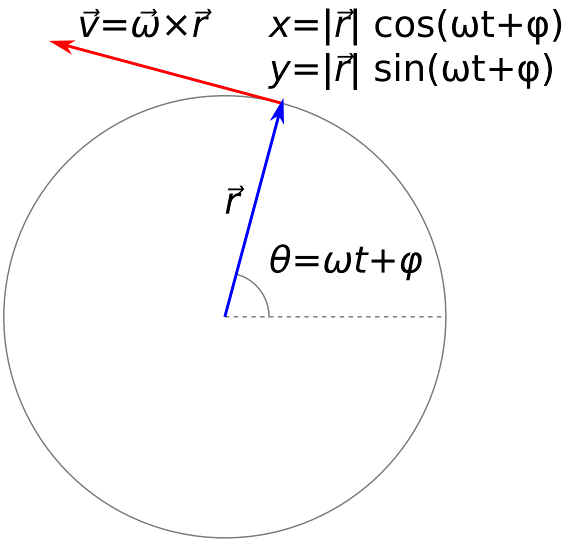
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{234}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos(\omega t + \varphi) \\ r\sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} \tag{235}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\omega r\sin(\omega t + \varphi) \\ \omega r\cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} \tag{236}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -\omega^2 r\cos(\omega t + \varphi) \\ -\omega^2 r\sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} \tag{237}$$

Moto armonico II



Restringendoci ad una delle coordinate otteniamo un moto detto *armonico*.

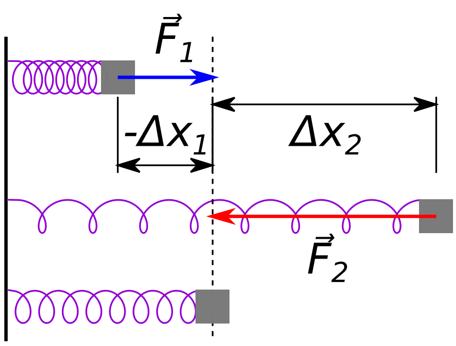
$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (238)$$
$$v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (239)$$
$$a(t) = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (240)$$

In generale un moto che soddisfa la relazione

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = a(t) = -\alpha\, x(t), \quad \alpha > 0 \quad (241)$$

si dice *armonico*.

Esempio di moto armonico: forza elastica



Ricordiamo la formula della forza elastica:

$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad (242)$$

quindi

$$m\vec{a} = -k\vec{x} \quad (243)$$

che soddisfa la relazione del moto armonico.

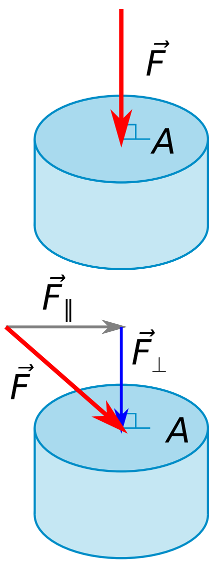
$$-m\omega^2 x_0 \cos(\omega t) = -kx_0 \cos(\omega t) \quad (244)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (245)$$

Indice

Grandezze fisiche
Richiami di matematica
Fisica del moto
Fluidi
Termodinamica
Elettromagnetismo

Pressione I

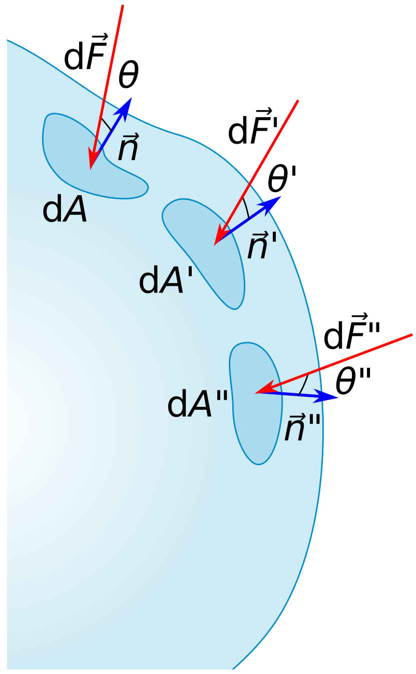


Se una forza è esercitata su una superficie, si definisce *pressione* il rapporto tra la magnitudine della forza perpendicolare e la dimensione della superficie.

$$p = \frac{\left|\vec{F}_{\perp}\right|}{A} \tag{246}$$

La pressione è una grandezza scalare quindi non si può parlare né di direzione né di verso.
Per un volume di fluido in equilibrio la componente tangenziale dovrà essere nulla altrimenti il fluido si muoverebbe, quindi rimane solo la componente perpendicolare.

Pressione II



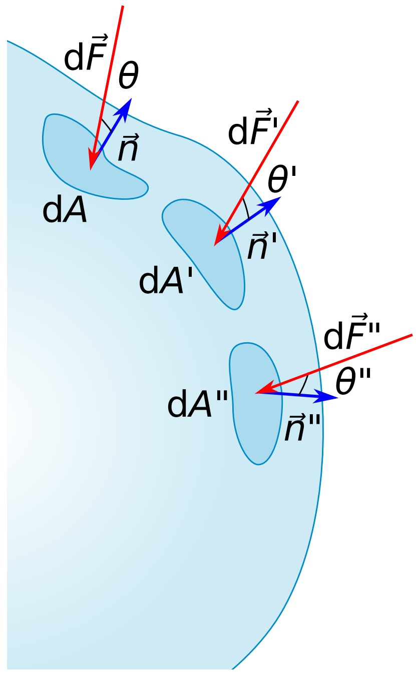
In generale se la forza non è perpendicolare alla superficie si suddivide la superficie in porzioni infinitesime descritte da dei vettori normali ad esse $\vec{n}$. In questo caso la pressione diventa:

$$p = -\frac{\vec{n} \cdot \mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}A} \tag{247}$$

ove si è cambiato il segno perché i vettori normali convenzionalmente sono uscenti dalla superficie. Ovvero la pressione è il coefficiente di proporzionalità tra la normale alla superfcie e la forza perpendicolare ad essa

$$\mathrm{d}\vec{F} = -p\vec{n}\,\mathrm{d}A \tag{248}$$

Pressione III



Per ottenere la forza totale su una superficie è necessario integrare la relazione

$$\mathrm{d}\vec{F} = -p\vec{n}\,\mathrm{d}A \tag{249}$$

ottenendo

$$\vec{F} = -\int_{\Sigma} p\vec{n}\,\mathrm{d}A. \tag{250}$$

Pressione IV

Analisi dimensionale

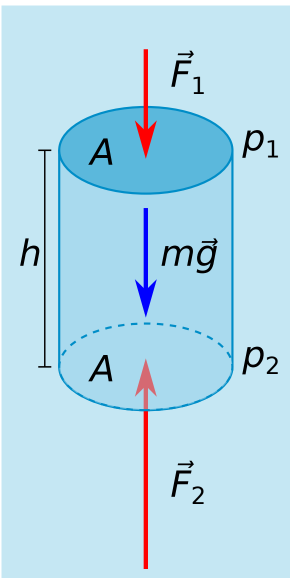
L'unità di misura della pressione è il *Pascal*:

$$[p] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{[M][L]}{[t]^2[L]^2} = \frac{[M]}{[t]^2[L]} = \mathrm{Pa} \tag{251}$$

Sfortunatamente per la pressione esistono diverse unità che sono comunemente usate in diversi contesti:

Bar	$1\,\mathrm{bar} = 1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$
Ettopascal	$1\,\mathrm{hPa} = 100\,\mathrm{Pa}$
Atmosfera	$1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$
Torricelli	$1\,\mathrm{torr} = 133.322\,\mathrm{Pa}$
mm di mercurio	$1\,\mathrm{mmHg} = 1\,\mathrm{torr} = 133.3\,\mathrm{Pa}$
libbre per pollice quadro	$1\,\mathrm{psi} = 6.8948 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa}$

Legge di Stevino



In condizioni di equilibrio la risultante delle forze agenti su un volumetto di fluido deve essere nulla

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + m\vec{g} + \vec{F}_2 = 0 \tag{252}$$

ove abbiamo assunto che le forze laterali siano nulle per simmetria del problema. Esprimento le forze in termini della pressione e la massa in termini della densità si ha

$$0 = p_1 A + \rho V g - p_2 A \tag{253}$$

quindi possiamo esprimere p_2

$$p_2 = p_1 + \rho g h \tag{254}$$

che è detta *legge di Stevino*.

Legge di Pascal

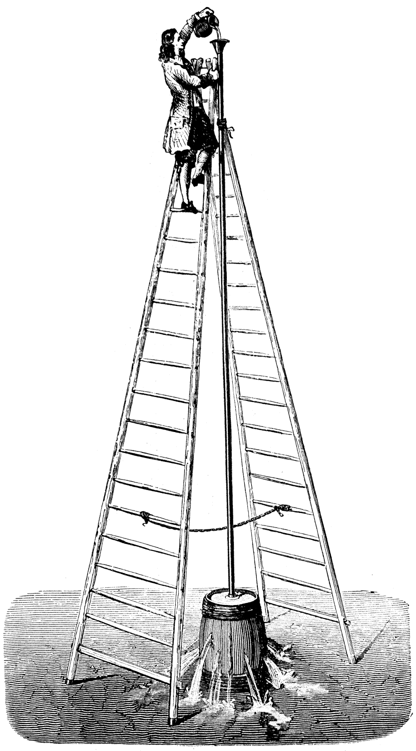
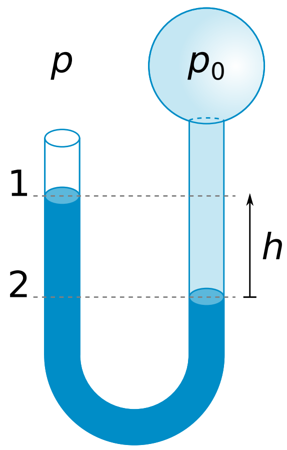


Figura: L'esperimento detto di Pascal [wiki]

La *legge di Pascal* afferma che, in un fluido in equilibrio e confinato, una variazione di pressione in un qualunque punto è trasmessa a tutti gli altri con la stessa intensità.
Assieme alla legge di Stevino abbiamo che in un fluido in equilibrio, a parità di profondità, la pressione è la stessa in ogni punto.

Misura della pressione

Manometro



Un tubo parzialmente riempito con un liquido può misurare una differenza di pressione tra due zone non comunicanti, ottenendo un *manometro*.

$$p_1 = p \tag{255}$$

$$p_2 = p_0 = p + \rho g h \tag{256}$$

Quindi nota p_0 è possibile misurare p:

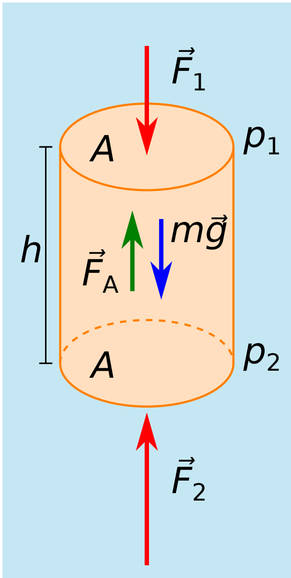
$$p = p_0 - \rho g h \tag{257}$$

Nel caso in cui $p_0 = 0\,\mathrm{Pa}$ allora si può misurare la pressione atmosferica:

$$p = -\rho g h \tag{258}$$

N.B. Attenzione al segno di h.

Principio di Archimede



Il *principio di Archimede* afferma che un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato.

$$F_2 = p_2 A = p_1 A + \rho_{\text{acqua}} g \underbrace{hA}_{=V} \tag{259}$$

$$F_2 = F_1 + mg + F_{\text{A}} \tag{260}$$

$$= p_1 A + \underbrace{\rho_{\text{corpo}} V}_{m} g + F_{\text{A}} \tag{261}$$

ottenendo il valore della forza d'Archimede:

$$F_{\text{A}} = -(\rho_{\text{acqua}} - \rho_{\text{corpo}}) Vg \tag{262}$$

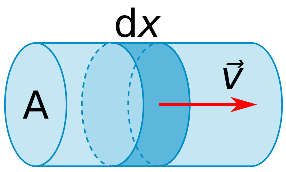
Se $\rho_{\text{corpo}} > \rho_{\text{acqua}}$ allora la spinta è verso l'alto e quindi il corpo galleggia.

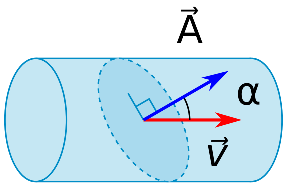
Fluido ideale

Per studiare la dinamica dei fluidi partiremo dallo studio dei *fluidi ideali*, che hanno le seguenti proprietà:

- *Incomprimibili*: la densità è costante nel tempo e nello spazio (nel caso dei liquidi è un'ottima approssimazione);
- *Non viscoso*: l'attrito del fluido con sé stesso e col contenitore è trascurabile.

Portata





La *portata* Q è la quantità di fluido che attraversa una sezione di area S nell'unità di tempo. Si può misurare in volume o massa *i.e.* m/s^3 o kg/s.

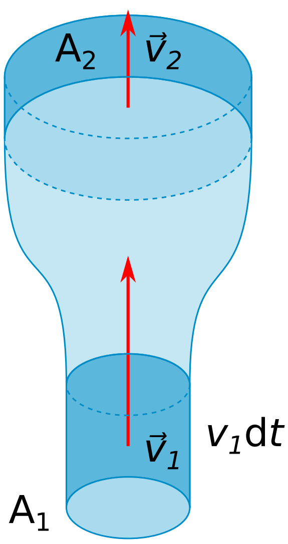
$$Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Av \qquad (263)$$

In generale se A non è perpendicolare a $\vec{v}$ allora si ha

$$Q = Av\cos\alpha \qquad (264)$$

Il *flusso* Φ è un concetto più generale che nel caso di un fluido coincide con la portata.

Legge della portata



Applichiamo la conservazione della massa ad un fluido incomprimibile, in regime di flusso stazionario e in un condotto a pareti rigide:

$$\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t} \qquad (265)$$

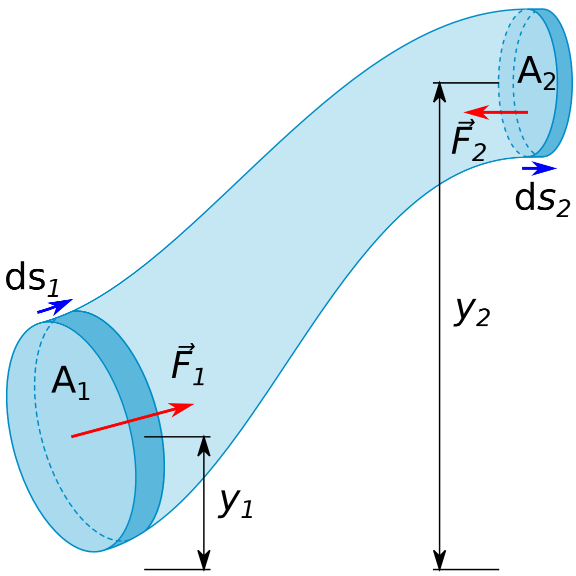
$$\rho A_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \rho A_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \qquad (266)$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad (267)$$

ottenendo

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1} \qquad (268)$$

Lavoro della pressione



Calcoliamo il lavoro compiuto dalla pressione su di un fluido

$$dW = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i \tag{269}$$

$$= p_1 \vec{A}_1 \cdot d\vec{s}_1 + p_2 \vec{A}_2 \cdot d\vec{s}_2 \tag{270}$$

$$= p_1 dV \underbrace{- p_2 dV}_{F \text{ contraria } ds} \tag{271}$$

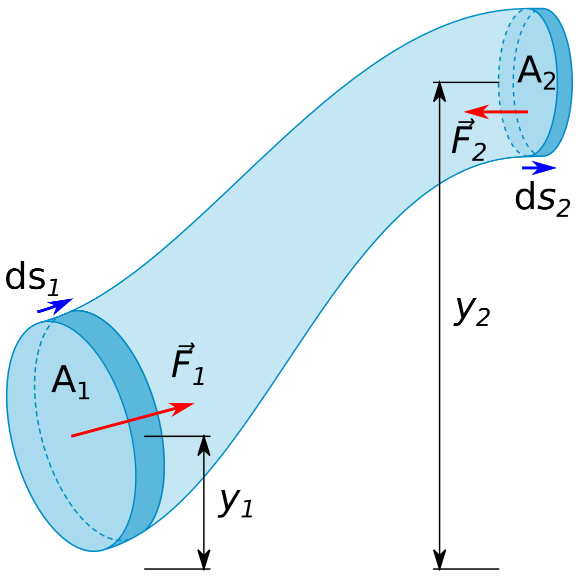
$$= (p_1 - p_2)\, dV \tag{272}$$

Ricordando dalla legge della portata

$$A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt \tag{273}$$

$$A_1 ds_1 = A_2 ds_2 \tag{274}$$

Energia in un fluido



Calcoliamo la variazione dell'energia degli elementi di volume

$$dU = U_2 - U_1 \tag{275}$$

$$= mgy_2 - mgy_1 \tag{276}$$

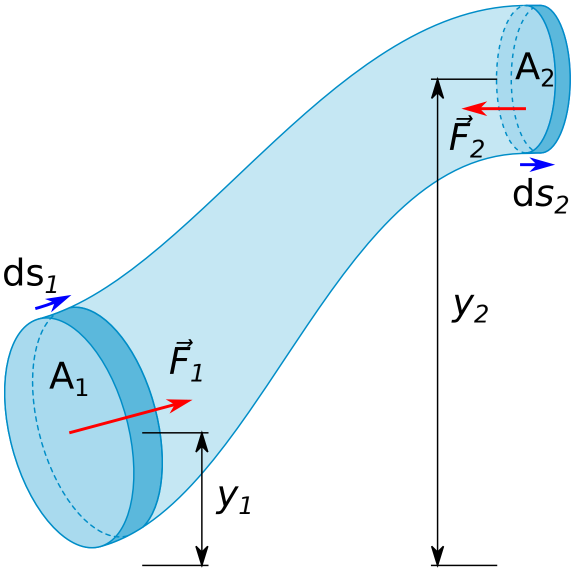
$$= (\rho g y_2 - \rho g y_1)\, dV \tag{277}$$

$$dE_k = E_2^k - E_1^k \tag{278}$$

$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \tag{279}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \right) dV \tag{280}$$

Teorema di Bernoulli I



Il lavoro è uguale alla variazione di energia:

$$dW = dU + dE_k \quad (281)$$

$$(p_1 - p_2)\,dV = (\rho g y_2 - \rho g y_1)\,dV + \left(\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2\right) dV \quad (282)$$

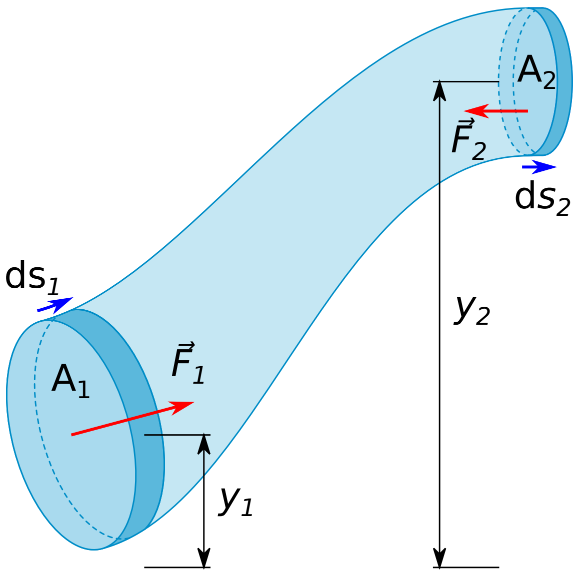
quindi

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (283)$$

ovvero

$$p + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante} \quad (284)$$

Teorema di Bernoulli II

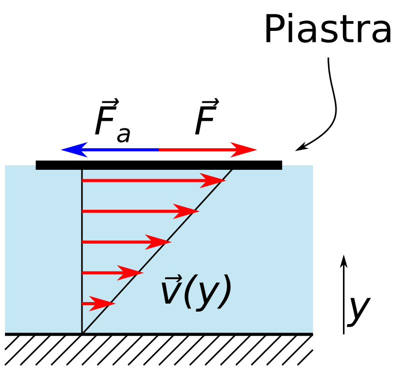


Il teorema di Bernoulli esprime la conservazione dell'energia meccanica applicata ad un tubo di flusso di un fluido.

$$\frac{1}{2}\rho v^2 \rightarrow \text{Densità di en. cinetica} \quad (285)$$

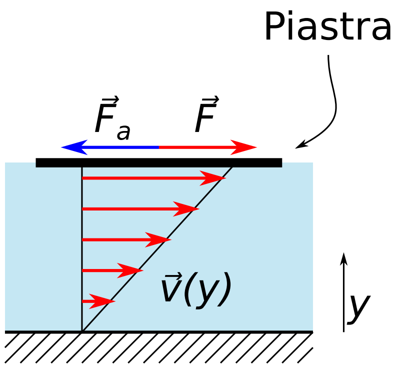
$$\rho g h \rightarrow \text{Densità di en. potenziale} \quad (286)$$

Viscosità dinamica I



La viscosità di un fluido rappresenta l'attrito *interno* ad un fluido, ovvero la sua tendenza a reagire ad uno sforzo di taglio.
La velocità relativa dello strato di fluido a diretto contatto con un oggetto solido è nulla. Ogni strato di liquido poi trascina gli strati a contatto, con una velocità inferiore.

Viscosità dinamica II



La formula della forza d'attrito viscoso è

$$F = \eta A \frac{dv_x}{dy} \tag{287}$$

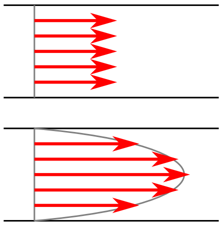
ove A è l'area su cui è applicata la forza e η è il coefficiente di viscosità dinamica.
L'unità di misura è il *Poiseuille* Pl

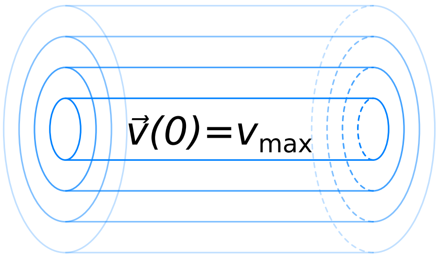
$$[\eta] = \frac{[F][L]}{[L^2][v]} = \frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pl} \tag{288}$$

ma è poco usato. Più comune è il *Poise* P

$$1\,\mathrm{Pl} = 10\,\mathrm{P} \tag{289}$$

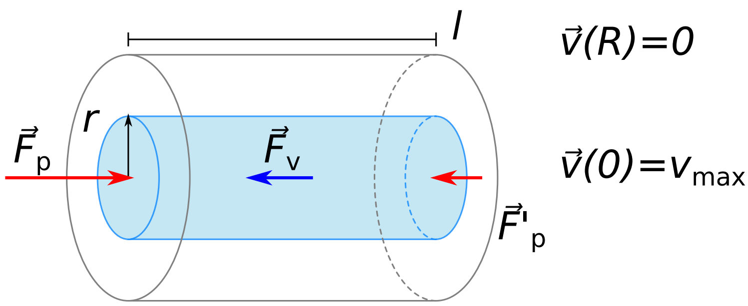
Moto viscoso in un condotto cilindrico





All'interno di un condotto cilindrico il fluido si muove per lamine cilindriche con velocità crescente dalla periferia al centro. Per un fluido viscoso è necessaria una differenza di pressione perché il fluido sia mantenuto in movimento.

Legge di Poiseuille I



Consideriamo un sotto-volume cilindrico del fluido di raggio r. La forza di pressione e la forza viscosa agente sulle pareti laterali sono

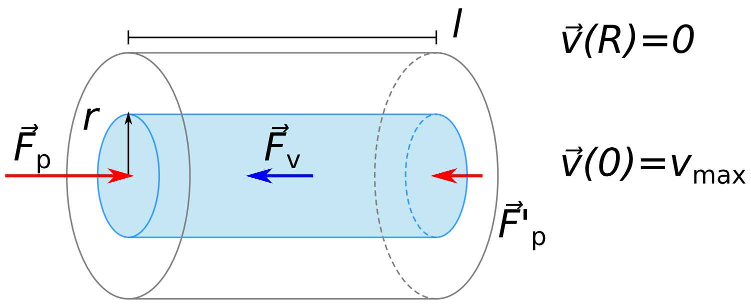
$$F_{p\ tot} = F'_p - F_p = \Delta p \pi r^2 \qquad \text{e} \qquad F_v = -\eta A \frac{dv_x}{dr} = -\eta\, 2\pi r l\, \frac{dv_x}{dr} \tag{290}$$

Se il sistema è stazionario allora possiamo eguagliarle

$$-\eta\, 2\pi r l\, \frac{dv_x}{dr} = \Delta p \pi r^2 \tag{291}$$

Questa è un'equazione differenziale a variabili separabili.

Legge di Poiseuille II



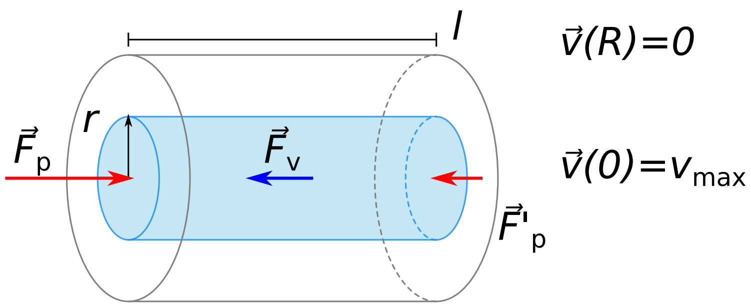
$$-\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r} = \Delta p \frac{r}{2\eta l} \tag{292}$$

Quest'equazione è risolvibile "con un trucco"

$$-\int_{v(\varrho)}^{v(R)} \mathrm{d}v_x = \int_{\varrho}^{R} \Delta p \frac{r}{2\eta l} \mathrm{d}r \tag{293}$$

$$v(\varrho) - \underbrace{v(R)}_{=0} = \Delta p \frac{R^2 - \varrho^2}{4\eta l} \tag{294}$$

Legge di Poiseuille III



Il profilo della velocità nel tubo quindi è

$$v(r) = \Delta p \frac{R^2 - r^2}{4\eta l} \tag{295}$$

Calcoliamo la portata

$$Q = \int_0^R v(r)\, 2\pi r\, \mathrm{d}r = \int_0^R \Delta p \frac{R^2 - r^2}{4\eta l} 2\pi r\, \mathrm{d}r = \Delta p \frac{\pi R^4}{8\eta l} \tag{296}$$

che è detta *legge di Poiseuille*.

Legge di Stokes

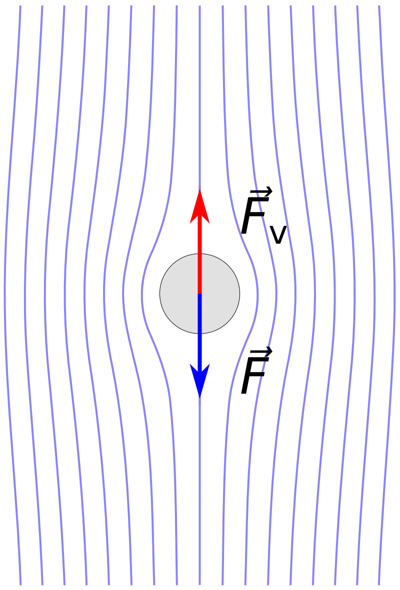


Figura: Linee di flusso attorno ad una sfera. [wiki]

Nel caso di una sfera che si muove all'interno di un fluido in regime laminare, essa subisce una forza di attrito viscoso pari a

$$\vec{F}_v = -6\pi\eta r\vec{v} \tag{297}$$

ove η è il coefficiente di viscosità dinamica, r è il raggio della sfera, v è la velocità relativa tra sfera e fluido. È detta *legge di Stokes*.

Numero di Reynolds

Figura: Passaggio da regime laminare a turbolento per il fumo di una candela. [wiki]

Il *numero di Reynolds* è un numero puro che rappresenta il rapporto tra forze inerziali e viscose. Aiuta a determinare il momento in cui il regime di un fluido passa da laminare a turbolento.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\eta} \tag{298}$$

ove ρ è la densità del fluido, v è la velocità media del fluido, d una lunghezza caratteristica del sistema in esame e η è il coefficiente di viscosità dinamica.
Ogni geometria ha un valore *critico* del numero di Reynolds, che indica la regione di transizione tra i due regimi.

Indice

Grandezze fisiche
Richiami di matematica
Fisica del moto
Fluidi
Termodinamica
Elettromagnetismo

Stati della materia

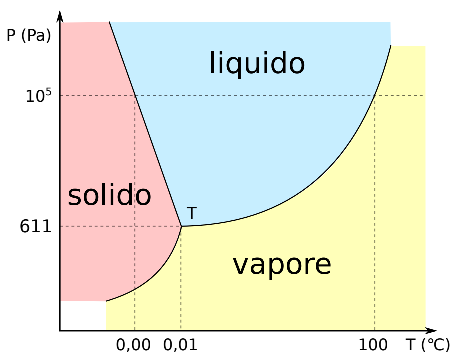
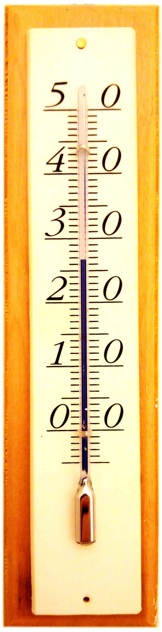


Figura: Diagramma di fase dell'acqua [wiki]

Nella nostra quotidianità abbiamo esperienza di tre stati della materia:

- Nei solidi i costituenti sono strettamente legati tra loro, ma possono vibrare. Possiedono una forma stabile ed un volume definito.
- I liquidi sono dei fluidi quasi incomprimibili, quindi hanno un volume definito, ma prendono la forma del contenitore in cui sono posti.
- In un gas i costituenti sono molto poco interagenti. Riempiono i contenitori in cui sono posti e sono comprimibili, quindi non hanno un volume definito.

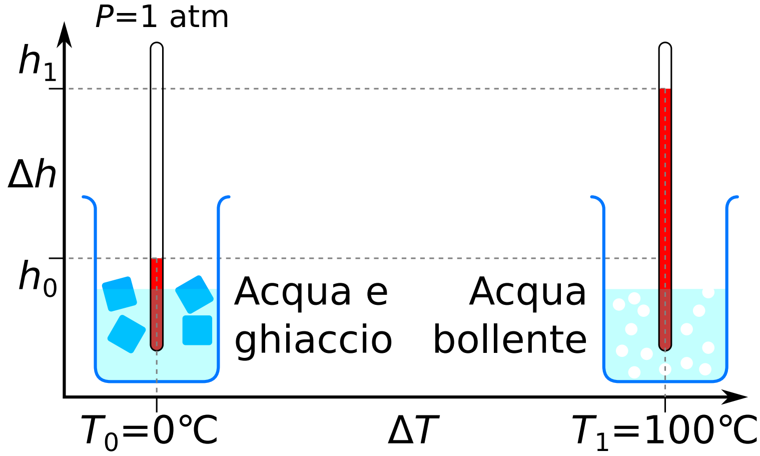
Temperatura



- La *temperatura* è una grandezza fisica che indica lo stato termico di un corpo, ovvero la sua energia termica interna.
- È una delle coordinate termodinamiche che si usano per descrivere il comportamento di un sistema termodinamico.
- Istintivamente sappiamo distringuere la sensazione di "freddo" e "caldo," ma per misurarla si sfruttano le caratteristiche che dipendono dalla temperatura di alcune sostanze.
- Un corpo può avere la stessa temperatura, ma trovarsi in stati differenti (*e.g.* l'acqua a 0 °C può essere sia liquida che solida).

Misura della temperatura

Esistono diverse tecniche per misurare la temperatura di un corpo: sostanzialmente si osserva l'evoluzione di una proprietà del corpo che dipenda dalla temperatura. Definendo dei *punti fissi* si può costruire una curva di calibrazione per la misura della temperatura.



E.g. La colonnina di un termometro ad alcool si *dilata* all'aumentare della temperatura

$$T_{\text{mis}} = \frac{\Delta T}{\Delta h}(h - h_0) + T_0 \quad (299)$$

Equilibrio termico

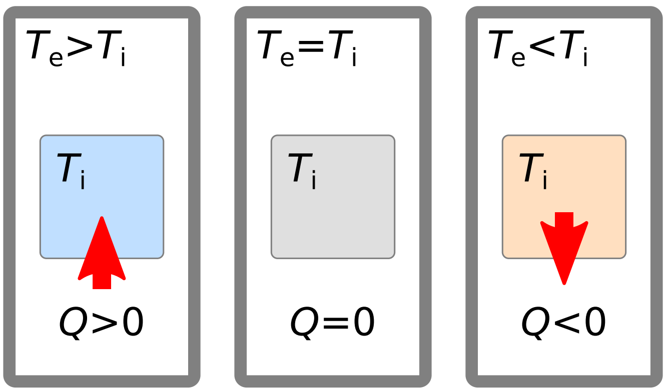
Se un sistema si trova in equilibrio le variabili che lo descrivono non cambiano, se non cambiano le condizioni esterne. Due corpi sono in *equilibrio termico* se si trovano alla stessa temperatura, ovvero non scambiano energia termica.

Principio zero della termodinamica

Se due corpi A e B sono in equilibrio termico con C, allora A e B sono in equilibrio tra di loro.

Energia termica I

Quando due corpi a temperature differenti sono messi a contatto, si scambiano *energia termica* (storicamente chiamato *calore*) per raggiungere l'equilibrio termico.



Capacità termica

Capacità termica

È la quantità di energia termica necessaria per alzare di un grado la temperatura di un corpo

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \tag{300}$$

Si misura in J/K oppure cal/K.

Calore specifico

Calore specifico

È la capacità termica per unità di massa

$$c = \frac{C}{m} = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \tag{301}$$

Si misura in $\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$ oppure cal/K.

- In generale dipende dalla temperatura T.
- Solitamente scambi di energia termica per liquidi e solidi sono a pressioni costanti, quindi si intende *calore specifico a pressione costante*.
- Per i gas invece si differenziano i casi

$$c_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_{V=\text{cost.}} \qquad c_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_{p=\text{cost.}} \tag{302}$$

ove n è il numero di moli del gas (invece che la massa).

Calore latente

Durante i cambiamenti di fase di una sostanza, la temperatura non varia. Dell'energia termica è comunque scambiata con l'ambiente, per permettere al sistema di cambiare il proprio stato.

Calore latente

Il *calore latente* è la quantità di energia termica, per unità di massa, scambiata con l'ambiente durante i passaggi di fase.

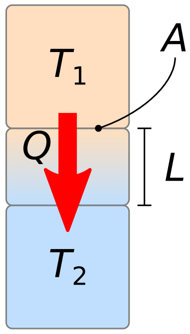
E.g.
Calore latente di fusione dell'acqua: $333\,\mathrm{kJ/kg}$.
Calore latente di ebollizione dell'acqua: $2272\,\mathrm{kJ/kg}$.

Metodi di trasporto dell'energia termica

Esistono tre metodi di trasporto dell'energia termica:

- Conduzione [pag. 135];
- Convezione [pag. 136];
- Irraggiamento [pag. 137].

Conduzione dell’energia termica



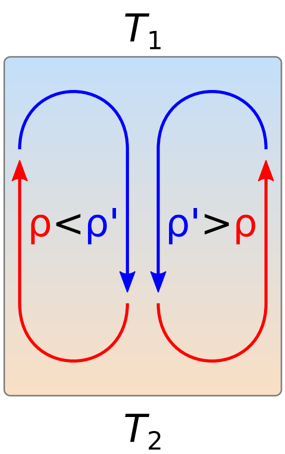
È il metodo di trasporto all’interno dei solidi, quindi senza scambio di materia, ma solo per agitazione termica.
La *legge di Fourier* esprime il tasso di conduzione dell’energia termica:

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{\Delta T}{L} \tag{303}$$

ove A è l’area di contatto tra gli oggetti, L è lo spessore attraverso cui il calore è condotto e k è il *coefficiente di conducibilità termica*.

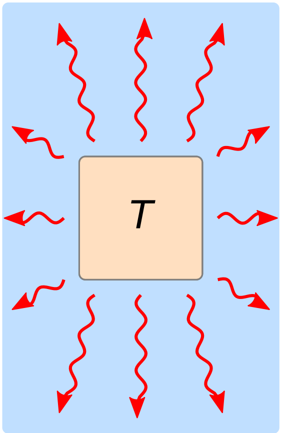
$$[k] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}} \tag{304}$$

Convezione



Nei fluidi il trasporto avviene principalmente per *convezione*, ovvero per mezzo del trasporto di materia a diverse temperature. Si creano ad esempio quelle che si chiamano *celle convettive*, che sono dei vortici tra zone a temperature diverse.
La variazione di temperatura comporta una variazione di densità e quindi il fluido più caldo (leggero) tende a salire.

Irraggiamento



Il metodo di trasporto per *irraggiamento* non necessita di un mezzo materiale, perché l'energia termica è trasmessa tramite energia elettromagnetica.
La *legge di Stefan-Boltzmann* esprime il tasso di emissione dell'energia termica:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\epsilon\sigma A T^4 \tag{305}$$

ove A è la superficie del corpo, ϵ l'emissività della superficie

$$0 < \epsilon < 1 \tag{306}$$

e σ è la *costante di Stefan-Boltzmann* che vale:

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}} \tag{307}$$

Gas ideali

Gas ideale

Un *gas ideale* è un gas le cui variabili termodinamiche soddisfano la relazione, detta *equazione di stato*:

$$pV = nRT \tag{308}$$

ove p è la pressione, V il volume, n il numero di moli, T la temperatura ed R è una costante chiamata *costante dei gas*.

$$R = 8.31 \, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}} \tag{309}$$

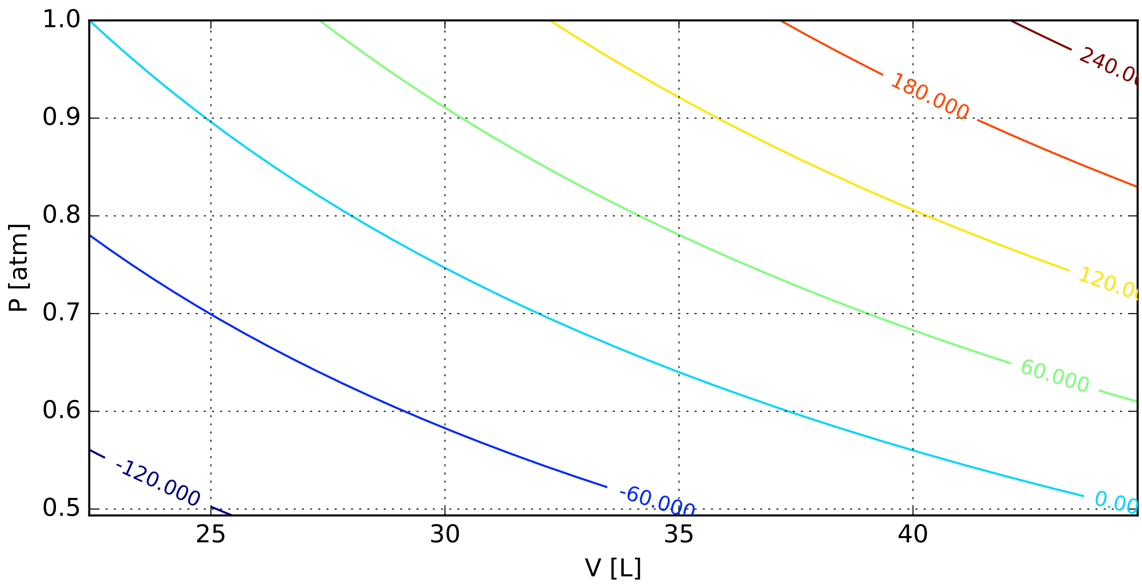
Il comportamento dei gas reali è tipicamente ben descritto dalla *legge dei gas ideali*.

Condizioni di applicabilità

Le condizioni di applicabilità della legge dei gas ideali per un gas reale sono:

- bassa densità del gas (dimensioni dei costituenti è trascurabile);
- i costituenti (atomi, molecole, ...) non sono interagenti tra loro (interazione a distanza trascurabile, bassa densità, alta temperatura e quindi energia media);
- le interazioni con le pareti è di tipo elastico (l'energia cinetica è conservata);
- i costituenti sono identici fra loro.

Diagramma di Clapeyron



La legge dei gas ideali vincola la relazione tra le coordinate termodinamiche p, V, e T; che può essere graficata in un diagramma detto di Clapeyron o p-V.

Derivazione della legge dei gas ideali

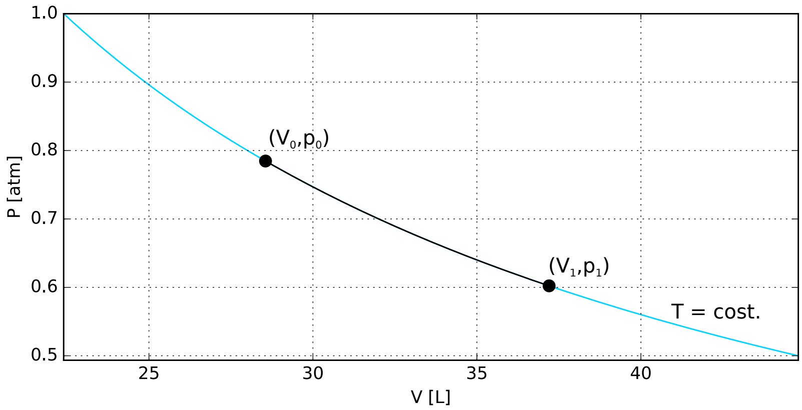
La legge del gas ideale è stata dedotta da un'insieme di leggi sperimentali, vediamo

- La legge di Boyle-Mariotte [pag. 142];
- la prima legge di Gay-Lussac [pag. 143];
- la seconds legge di Gay-Lussac [pag. 143].

Legge di Boyle-Mariotte

La *legge di Boyle-Mariotte* afferma che

$$pV\Big|_{T=\text{cost.}} = \underbrace{\text{cost.}}_{=nRT} \qquad (310)$$



ovvero

$$p \propto \frac{1}{V}\Big|_{T=\text{cost.}} \qquad (311)$$

$$V \propto \frac{1}{p}\Big|_{T=\text{cost.}} \qquad (312)$$

Leggi di Gay-Lussac I

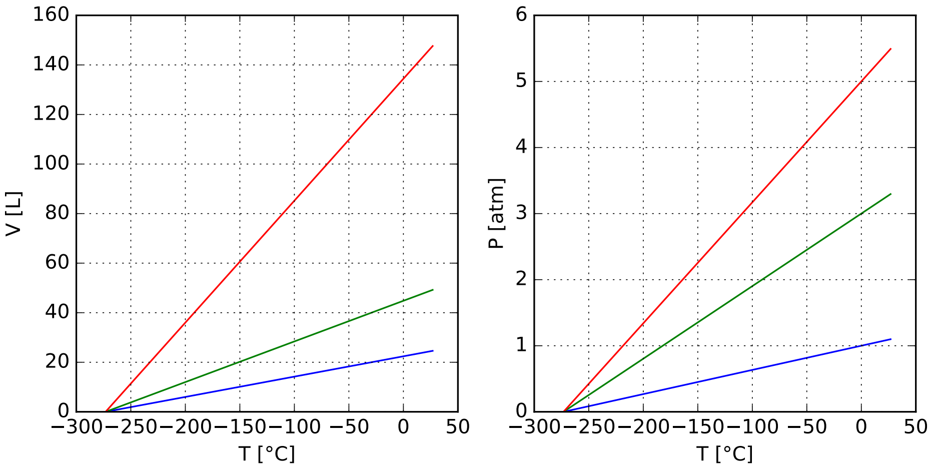
Temperatura espressa in gradi centigradi

- *Prima legge di Gay-Lussac*:

$$V = V_0 \left(1 + \alpha T\right)_{p=\text{cost.}} \qquad [T] = [°\text{C}] \tag{313}$$

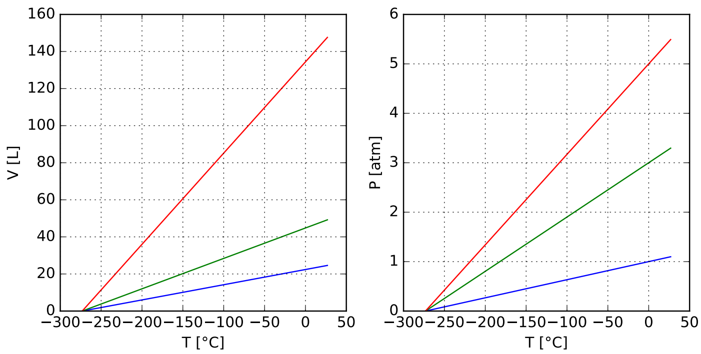
- *Seconda legge di Gay-Lussac*:

$$p = p_0 \left(1 + \beta T\right)_{V=\text{cost.}} \qquad [T] = [°\text{C}] \tag{314}$$



Leggi di Gay-Lussac II

Osservazioni sperimentali



Sperimentalmente si vede che le rette descritte si congiungono tutte a $T_0 = -273.15\,°\text{C}$ giungendo a $V = 0$:

$$0 = V_0 \left(1 + \alpha T_0\right) \tag{315}$$

$$\alpha = -\frac{1}{T_0} = \frac{1}{273.15\,°\text{C}} \tag{316}$$

ed analogamente per la pressione:

$$\beta = -\frac{1}{T_0} = \frac{1}{273.15\,°\text{C}} \tag{317}$$

Legge di Avogadro

Sperimentalmente si vede inoltre che, per tutti i gas ideali, alle *condizioni standard* di temperatura e pressione

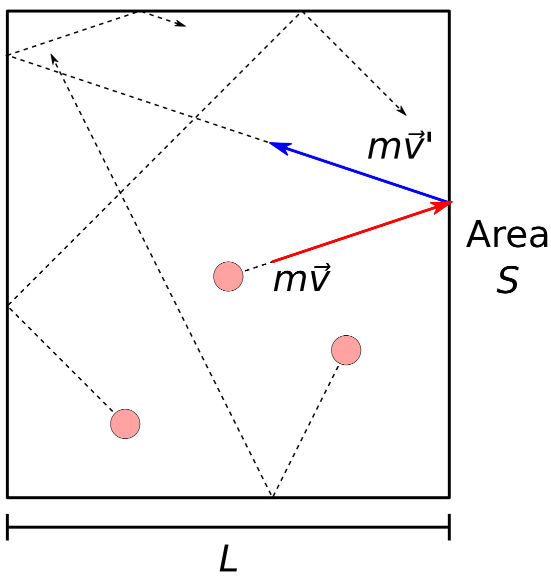
$$p_0 = 101\,325\,\mathrm{Pa} \tag{318}$$
$$T_0 = 0\,^{\circ}\mathrm{C} \tag{319}$$

il volume è descritto dalla legge detta di *Avogadro*:

$$V_0 = nV_m \tag{320}$$

ove n è il numero di moli del gas e $V_m = 22.4\,\mathrm{L}$.

Teoria cinetica dei gas I



I gas sono costituiti da molecole in continuo movimento che urtano le pareti dei contenitori. La pressione è dovuta al continuo bombardamento molecolare (effetto macroscopico dei fenomeni molecolari).

Teoria cinetica dei gas V

Eguagliamo le espressioni della pressione per un gas ideale

$$p = \frac{2}{3}\frac{n\mathcal{N}_A}{V}\langle E_k\rangle \qquad \& \qquad pV = nRT \tag{321}$$

ottenendo

$$\frac{2}{3}\frac{n\mathcal{N}_A}{V}\langle E_k\rangle = \frac{nRT}{V} \tag{322}$$

quindi

$$\langle E_k\rangle = \frac{3}{2}\frac{R}{\mathcal{N}_A}T \tag{323}$$

$$= \frac{3}{2}kT \tag{324}$$

ove k è la *costante di Boltzmann*:

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}. \tag{325}$$

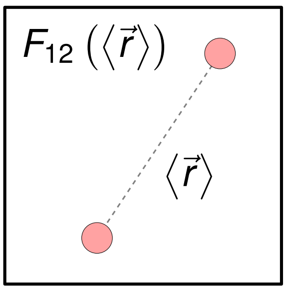
Energia interna di un sistema

L'energia interna di un sistema è la somma delle energie di tutte le molecole

$$U = \sum_i U_i = N\langle E_k\rangle = n\mathcal{N}_A\frac{3}{2}\frac{R}{\mathcal{N}_A}T \tag{326}$$

$$= \frac{3}{2}nRT \tag{327}$$

che è funzione *solamente* della temperatura.



Nel caso di *gas reali* non si può assumere che le molecole siano non interagenti. Le forze d'interazione dipendono dalla loro distanza e quindi anche dal volume.

$$\underbrace{U = U(T)}_{\text{Ideale}} \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{U = U(T, V)}_{\text{Reale}} \tag{328}$$

Principio zero della termodinamica

Se un sistema si trova in equilibrio le variabili che lo descrivono non cambiano, se non cambiano le condizioni esterne. Due corpi sono in *equilibrio termico* se si trovano alla stessa temperatura, ovvero non scambiano energia termica.

Principio zero della termodinamica

Se due corpi A e B sono in equilibrio termico con C, allora A e B sono in equilibrio tra di loro.

Primo principio della termodinamica

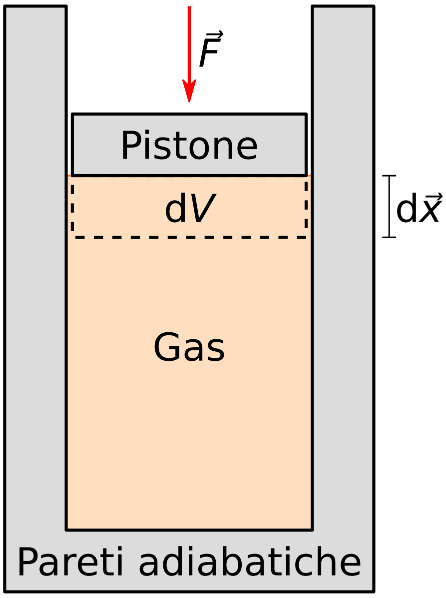
La formulazione della legge di conservazione dell'energia è detta *primo principio della termodinamica*, che mette in relazione l'energia interna del sistema col lavoro fatto su di esso ed il calore scambiato.

Primo principio della termodinamica

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q - \mathrm{d}W \tag{329}$$

ove Q è l'energia termica scambiata dal sistema con l'ambiente esterno, W è il lavoro fatto sul/dal sistema ed U rappresenta l'energia interna del sistema, che è una *funzione di stato*, ovvero dipende solo dai parametri p, V, T.

Lavoro di un gas



Il lavoro compiuto da una forza sul gas è

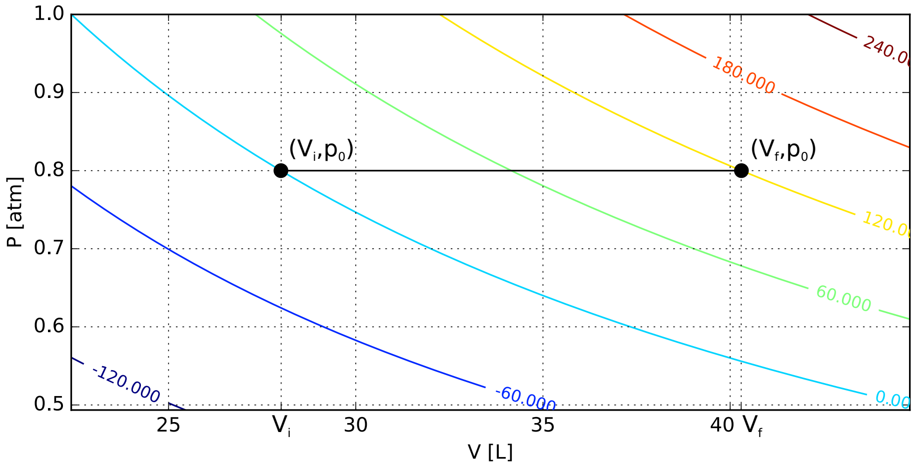
$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} & (330)\\ &= p\, \underbrace{S\,\mathrm{d}x}_{=V_f - V_i} & (331)\\ &= p\,\mathrm{d}V & (332)\\ & & (333)\end{aligned}$$

Nel caso di variazioni finite allora bisogna ricordare che p dipende da V e quindi

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p(V)\,\mathrm{d}V \qquad (334)$$

Trasformazioni termodinamiche I

Trasformazione isobara



Una *trasformazione isobara* è una trasformazione a *pressione costante* quindi il lavoro compiuto:

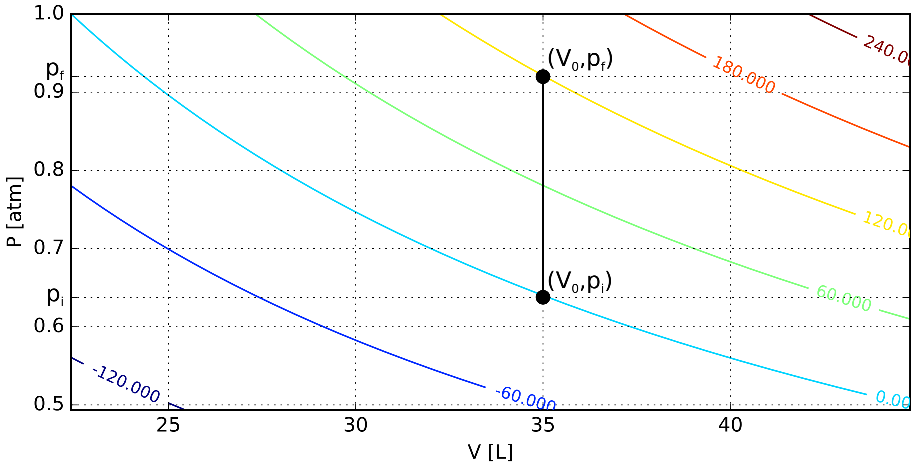
$$W = p_0\,(V_f - V_i) = p_0 \Delta V \qquad (335)$$

oltre al volume anche la temperatura deve variare perché sono legati dalla legge dei gas:

$$\Delta Q = nc_p \Delta T \qquad (336)$$

Trasformazioni termodinamiche II

Trasformazione isocòra



Una *trasformazione isocòra* è una trasformazione a *volume costante* ($\Delta V = 0$) quindi il lavoro compiuto è nullo:

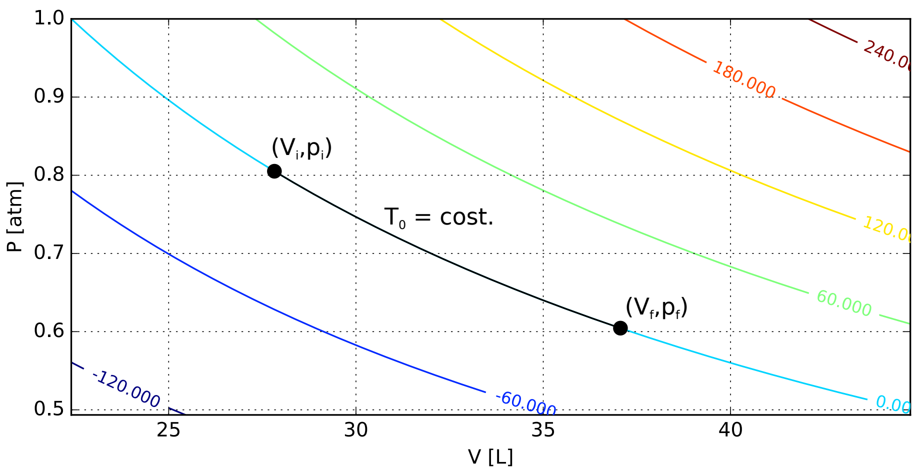
$$W = p_0 \Delta V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta U = \Delta Q - W = \Delta Q \qquad (337)$$

la variazione dell'energia interna è

$$\Delta U = n c_V \Delta T \qquad (338)$$

Trasformazioni termodinamiche III

Trasformazione isoterma I

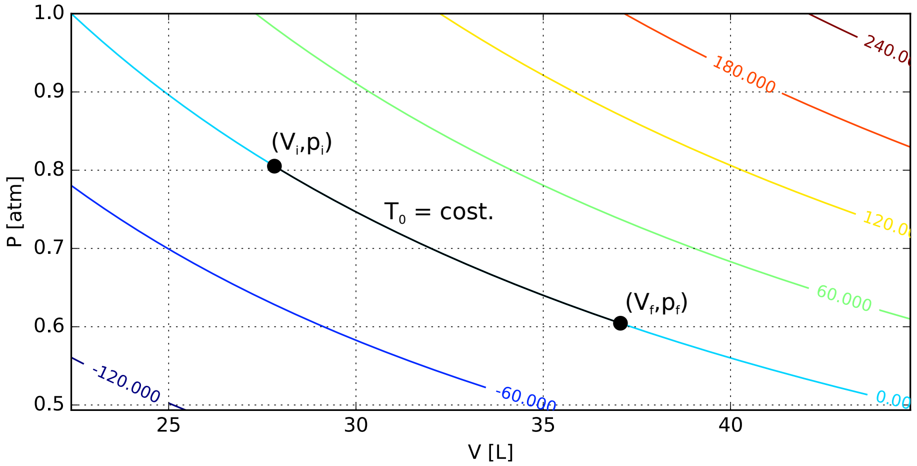


Una *trasformazione isoterma* è una trasformazione a *temperatura costante*. Per un gas ideale vale:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p(V)\,\mathrm{d}V = nRT_0 \int_{V_i}^{V_f} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_0 \left(\log V_f - \log V_i\right) \qquad (339)$$

Trasformazioni termodinamiche IV

Trasformazione isoterma II

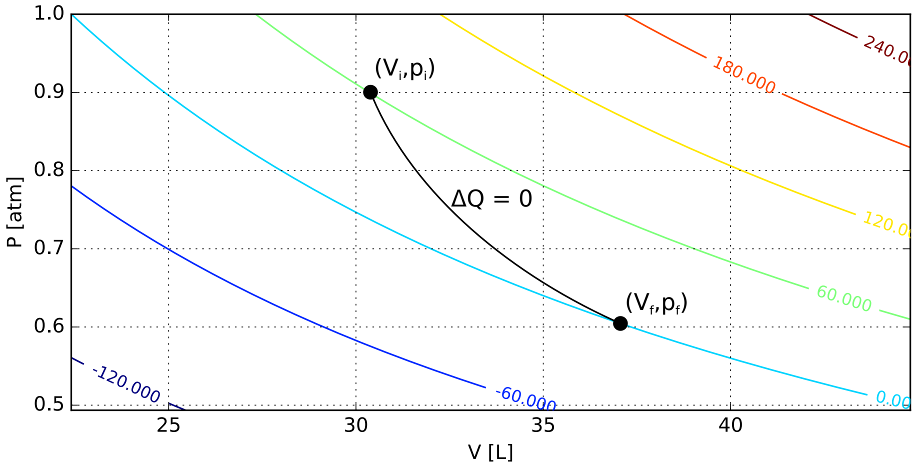


In una trasformazione isoterma l'energia interna invece non varia perché dipende solo da T:

$$\Delta U = U(T_0)_f - U(T_0)_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta Q = W \tag{340}$$

Trasformazioni termodinamiche V

Trasformazione adiabatica I



Una *trasformazione adiabatica* è una trasformazione *senza scambio di calore*:

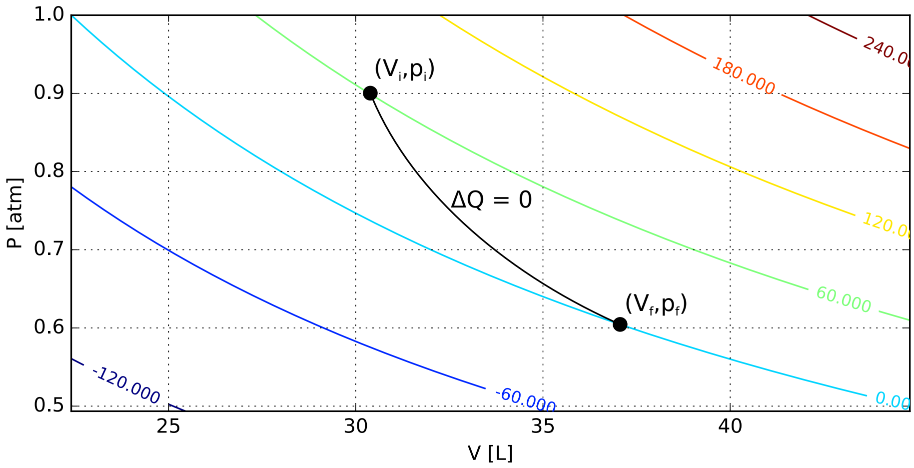
$$\Delta U = \Delta Q - W \qquad \Rightarrow \qquad \Delta U = -W \tag{341}$$

Per un gas ideale si può dimostrare che

$$pV^\gamma = \text{costante} \qquad \text{ove} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_V} \tag{342}$$

Trasformazioni termodinamiche VI

Trasformazione adiabatica II



Valgono quindi le relazioni:

$$pV^{\gamma} = \text{costante} \tag{343}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante} \tag{344}$$

$$T^{\gamma}p^{1-\gamma} = \text{costante} \tag{345}$$

ma le costanti *non sono uguali* tra loro.

Secondo principio della termodinamica

Il *secondo principio della termodinamica* ha diverse formulazioni *equivalenti*. Con questo principio si introduce il concetto di trasformazioni irreversibili.

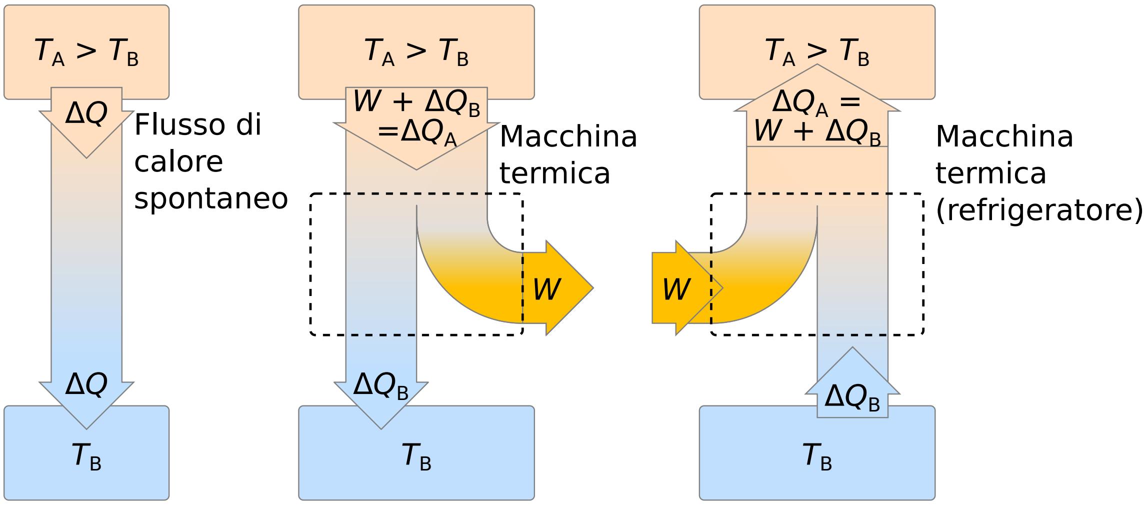
Secondo principio della termodinamica (Kelvin-Plank)

È impossibile per un sistema assorbire il calore di un secondo sistema con una temperatura omogenea e convertirlo completamente in lavoro, senza che il sistema stesso cambi stato.

Secondo principio della termodinamica (Clausius)

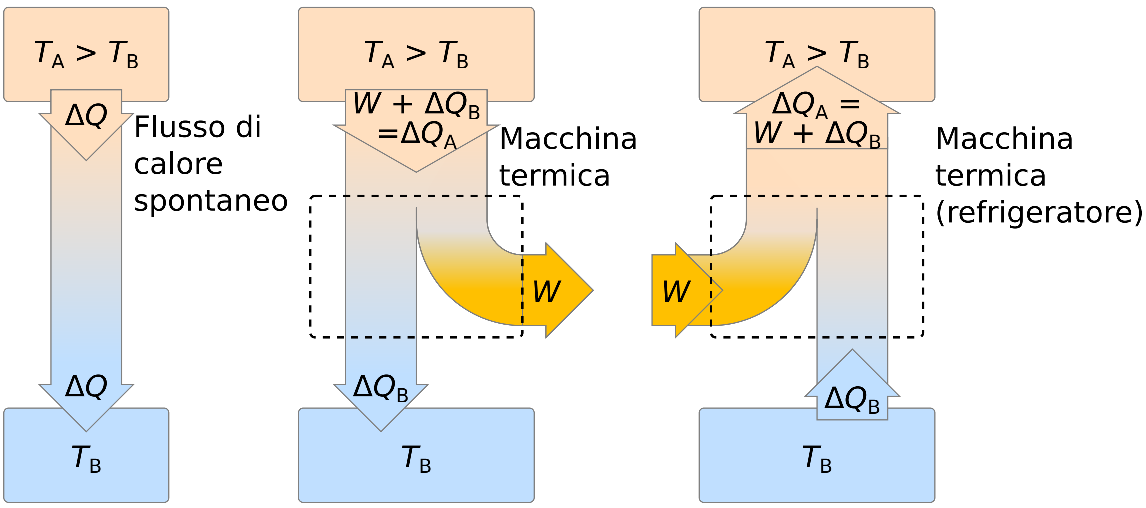
È impossibile realizzare un qualunque processo che abbia come unico risultato il trasporto di calore da un oggetto più freddo ad un oggetto più caldo, ovvero senza che sia compiuto lavoro esterno.

Macchine termiche e flussi di calore



Le macchine termiche sono macchine in grado di sfruttare delle differenze di temperatura per compiere lavoro, oppure indurre un flusso di energia termica compiendo lavoro. È possibile schematizzare il funzionamento delle macchine termiche immaginando il flusso dell'energia termica e del lavoro attraverso di esse.

Efficienza di macchine termiche

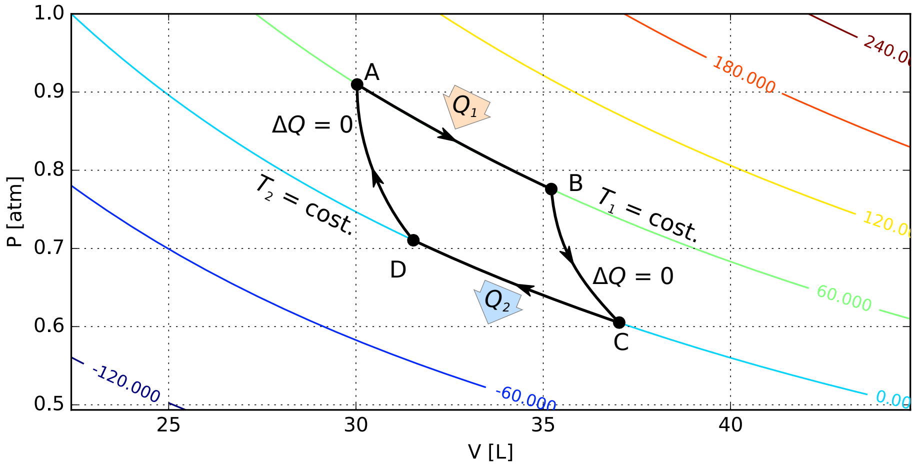


L'*efficienza* o *rendimento* di una macchina termica è definita come

$$\eta = \frac{W}{|\Delta Q|} = \frac{|Q_A| - |Q_B|}{|Q_A|} \qquad (346)$$

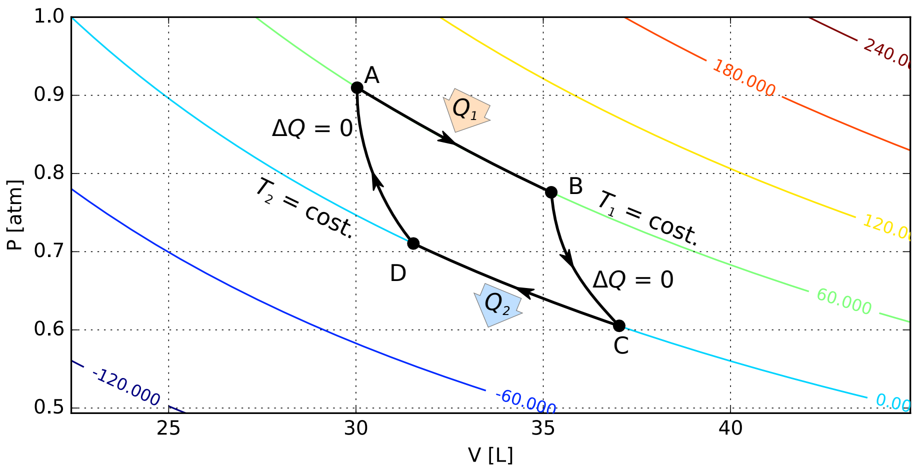
ove W è il lavoro compiuto e $|\Delta Q|$ è il calore totale assorbito dalla macchina.

Ciclo di Carnot I



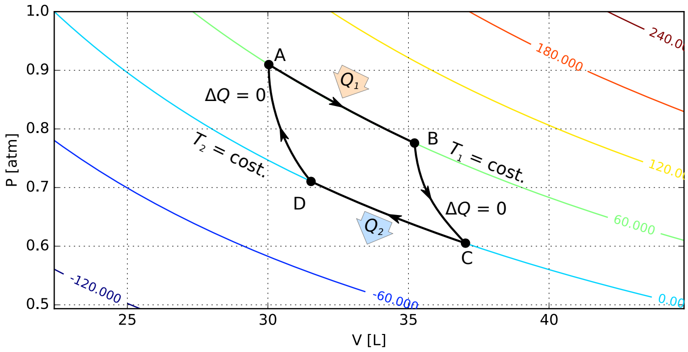
Il secondo principio della termodinamica ci dice che non esistono dei processi termodinamici che producono lavoro con un'efficienza del 100%. Il ciclo con la *migliore efficienza* possibile è il *ciclo di Carnot*, che è costituito da due trasformazioni adiabatiche intervallate da due trasformazioni isotermiche, tutte reversibili.

Ciclo di Carnot II



- Espansione isoterma (AB): $\Delta U_{AB} = Q_1 - W_{AB} = 0$ perché non cambia la temperatura.
- Espansione adiabatica (BC): $\Delta U_{BC} = W_{BC} \neq 0$ perché non c'è scambio di calore.
- Compressione isoterma (CD): $\Delta U_{CD} = Q_2 - W_{CD} = 0$.
- Compressione adiabatica (DA): $\Delta U_{DA} = W_{DA} \neq 0$.

Ciclo di Carnot III



Ricordando la formula del lavoro in una trasformazione isoterma:

$$Q_1 = W_{AB} = nRT_1 \log \left[\frac{V_B}{V_A} \right] \quad (347)$$

$$Q_2 = W_{CD} = nRT_2 \log \left[\frac{V_D}{V_C} \right] \quad (348)$$

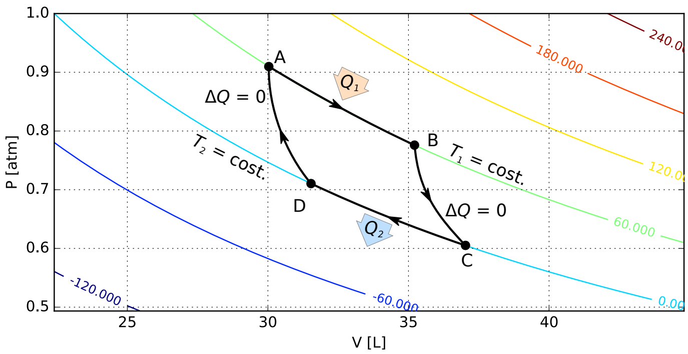
e le relazioni nelle trasformazioni adiabatiche:

$$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1} \quad \& \quad T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1} \quad (349)$$

quindi, dividendo tra loro le equazioni:

$$\frac{V_B^{\gamma-1}}{V_A^{\gamma-1}} = \frac{V_C^{\gamma-1}}{V_D^{\gamma-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \quad (350)$$

Ciclo di Carnot IV



Calcoliamo quindi l'efficienza del ciclo di Carnot

$$\eta = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{Q_1} \quad (351)$$

ricordando le proprietà dei logaritmi ($\log\left[\frac{a}{b}\right] = -\log\left[\frac{b}{a}\right]$)

$$|Q_1| - |Q_2| = nRT_1 \log \left[\frac{V_B}{V_A} \right] - nRT_2 \underbrace{\log \left[\frac{V_C}{V_D} \right]}_{=\log\left[\frac{V_B}{V_A}\right]} \quad (352)$$

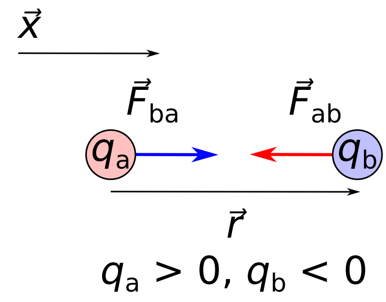
quindi l'efficienza è

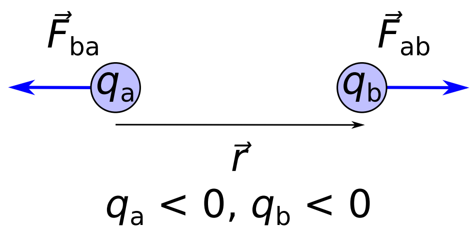
$$\eta = \frac{(T_1 - T_2) nR \log\left[\frac{V_B}{V_A}\right]}{T_1 nR \log\left[\frac{V_B}{V_A}\right]} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (353)$$

Indice

Grandezze fisiche
Richiami di matematica
Fisica del moto
Fluidi
Termodinamica
Elettromagnetismo

Forza di Coulomb





La forza che due cariche elettriche esercitano una sull'altra in condizioni *statiche* è detta *di Coulomb*.

$$\vec{F}_{ab} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_a q_b}{r^2} \vec{u}_r \qquad (354)$$

$$\vec{F}_{ba} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_a q_b}{r^2} \vec{u}_r \qquad (355)$$

ove q_i sono le cariche elettriche e $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C/(N\,m^2)}$ è detta *costante dielettrica del vuoto*.
E.g. Due cariche di 1 C ad 1 m di distanza:

$$\left|\vec{F}_{ab}\right| = \left|\vec{F}_{ab}\right| \approx 9 \cdot 10^9\,\mathrm{N} \qquad (356)$$

Carica elettrica

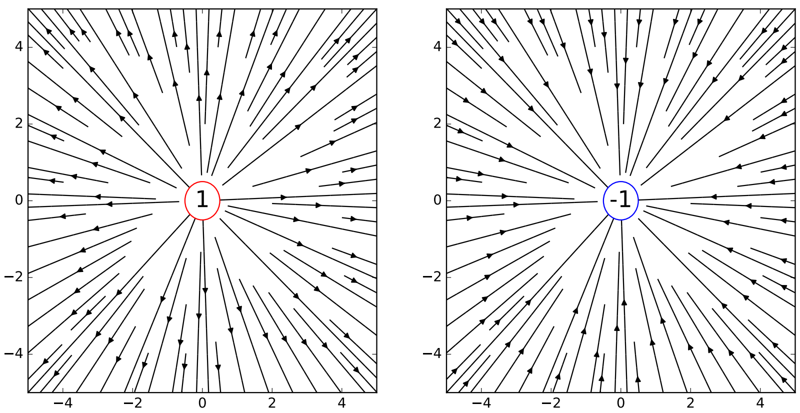
La carica elettrica è misurata in Coulomb (C) che è espressa in termini dell'unità fondamentale della corrente elettrica, l'Ampere (A):

$$[q] = \mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s} \tag{357}$$

Sperimentalmente si vede che la carica elettrica è quantizzata, ovvero esiste solo come multiplo intero della carica fondamentale dell'elettrone:

$$e^{-} = -1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{358}$$

Campo elettrostatico I



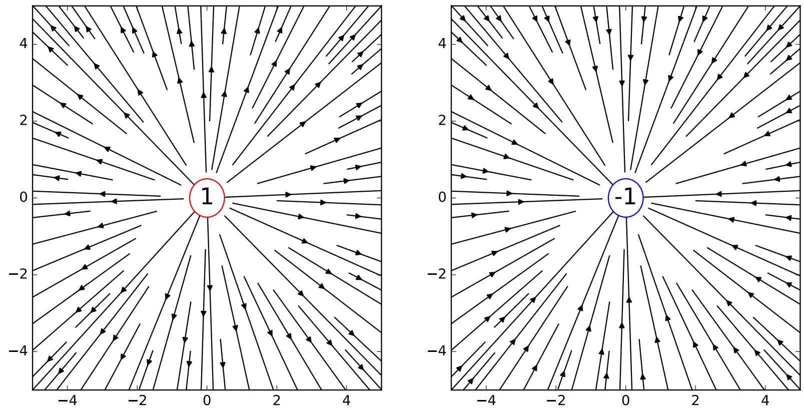
Similmente al campo gravitazionale possiamo definire il *campo elettrostatico* come il rapporto tra forza che subisce una carica di prova q ed il valore della carica stessa:

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{\vec{F}\left(\vec{r}\right)}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r \tag{359}$$

Convenzionalmente il campo è uscente per cariche positive ed entrante per cariche negative.

Campo elettrostatico II

Analisi dimensionale



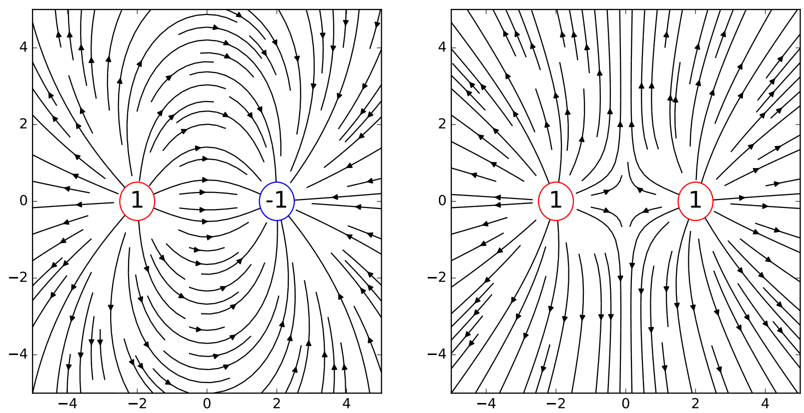
L'unità di misura per il campo elettrostatico è

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{A\,s}} \tag{360}$$

$$= \mathrm{V/m} \tag{361}$$

Generalmente lo si vede espresso come V/m.

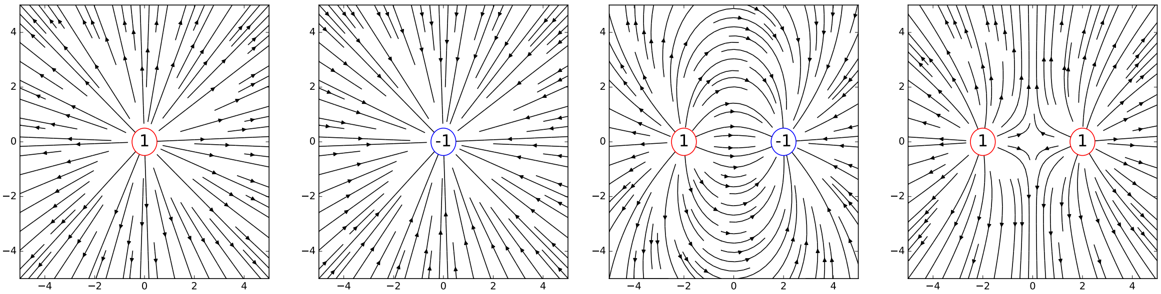
Campo elettrostatico III



Come per il campo gravitazionale vale il *principio di sovrapposizione*, ovver il campo di un insieme di cariche è la somma dei campi delle singole cariche

$$\vec{E}_{\mathrm{tot}} = \sum_i \vec{E}_i \tag{362}$$

Linee di campo



Le *linee di campo* sono delle linee tangenti in ogni punto al campo elettrostatico. Sono uscenti dalle cariche positive ed entranti in quelle negative.

Energia potenziale del campo elettrostatico I

Calcoliamo il lavoro contro la forza elettrica per portare una carica q_b da ∞ ad r_0 rispetto ad una carica q_a

$$W = \int_{\infty}^{r_0} \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_a q_b}{r^2} \right] \vec{u}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad (363)$$

$$= \frac{q_a q_b}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \qquad (364)$$

$$= \frac{q_a q_b}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_{\infty}^{r_0} \qquad (365)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_a q_b}{r_0} \qquad (366)$$

Ricordando che $\mathrm{d}U = -\mathrm{d}W$ otteniamo l'*energia potenziale*

$$U(r_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_a q_b}{r_0} \qquad (367)$$

Energia potenziale del campo elettrostatico II

$$U(r_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_a q_b}{r_0} \tag{368}$$

Cariche con segni concordi ($q_a q_b > 0$)

$U > 0$: Le cariche si respingono ed il campo compie lavoro per allontanarle.

Cariche con segni discordi ($q_a q_b < 0$)

$U < 0$: Le cariche si attraggono e si parla di *energia di legame*, ovvero è necessario fornire energia alle cariche per allontanarle.

Potenziale elettrostatico I

Possiamo calcolare il potenziale elettrostatico a partire dall'energia potenziale, sempre considerando una carica di prova q_b:

$$V(r) = \frac{U(r)}{q_b} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_a}{r} \tag{369}$$

L'unità di misura del potenziale è

$$[V] = \frac{[U]}{[q]} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\frac{1}{\mathrm{A\,s}} = \mathrm{V} \tag{370}$$

Potenziale elettrostatico II

Calcoliamo il lavoro fatto dal campo in funzione del potenziale

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}W = -\mathrm{d}U &= -\left[U(r+\mathrm{d}r) - U(r)\right] &\quad (371)\\
&= -q\left[V(r+\mathrm{d}r) - V(r)\right] = -q\,\mathrm{d}V &\quad (372)
\end{aligned}
$$

Ricordando la definizione di lavoro

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = qE\,\mathrm{d}x \quad (373)$$

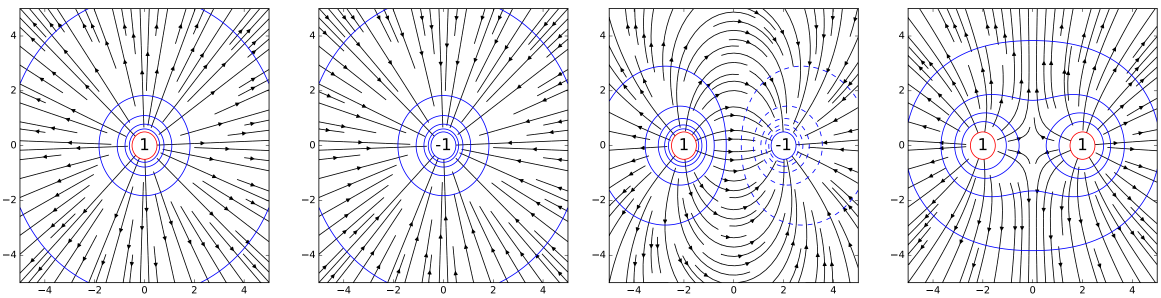
ed eguagliando le espressioni

$$qE\,\mathrm{d}x = -q\,\mathrm{d}V \qquad \Rightarrow \qquad E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \quad (374)$$

in generale

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \text{ove} \quad E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x},\; E_y = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y},\; E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} \quad (375)$$

Superfici equipotenziali



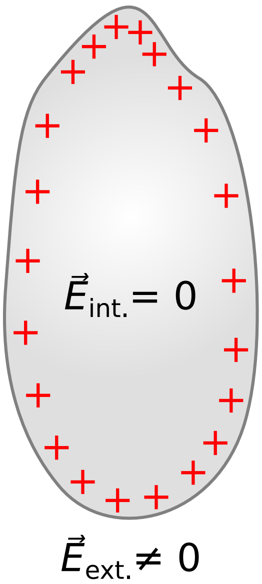
Le *superfici equipotenziali* sono delle superfici sulle quali il potenziale è costante

$$V(\text{sup. equip.}) = \text{cost.} \quad (376)$$

Le superfici equipotenziali sono perpendicolari alle linee di campo. *E.g.* Per una carica puntiforme sono delle superfici sferiche centrate sulla carica.

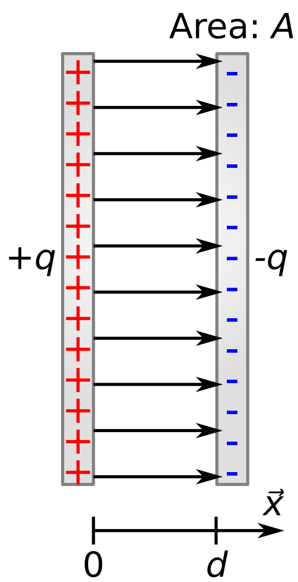
Campo elettrostatico nei conduttori carichi I

Un materiale in cui le cariche sono libere di muoversi si dice *conduttore*.



- All'interno di un conduttore **in equilibrio** $\vec{E}_{int.} = 0$, perché, se non fosse in equilibrio, le cariche si muoverebbero per effetto di $\vec{E}$.
- $\vec{E}$ deve essere perpendicolare alla superficie ($\vec{E} \perp \mathrm{d}s$), altrimenti le cariche si muoverebbero su di essa.
- $\vec{E} \perp \mathrm{d}s$ implica che la superficie sia equipotenziale (ricordando che $E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$).
- Se la superficie è equipotenziale e $\vec{E} = 0$ all'interno, allora tutto il conduttore è allo stesso potenziale.

Condensatore I



Un condensatore è costituito da una coppia di conduttori accoppiati, su cui si può accumulare carica. Ricordando che

$$E_{int} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{377}$$

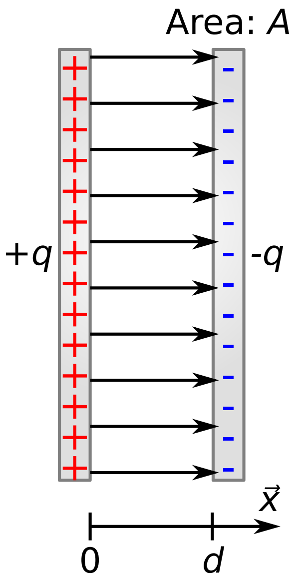
possiamo integrarlo per ottenere la differenza di potenziale tra le armature

$$V(d) - V(0) = -\int_0^d E_{int}\,\mathrm{d}x \tag{378}$$

$$= -E_{int}\int_0^d \mathrm{d}x \tag{379}$$

$$= -E_{int}\,d \tag{380}$$

Condensatore II



Calcoliamo la carica accumulata sulla superficie ricordando che

$$V = Ed \qquad \& \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{381}$$

assumendo che l'area delle piastre sia A:

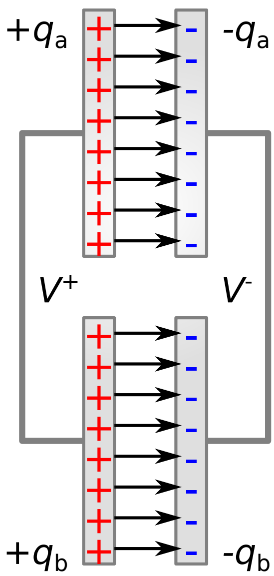
$$q = \sigma A = E\varepsilon_0 A = \frac{V}{d}\varepsilon_0 A \tag{382}$$

$$= \underbrace{\frac{\varepsilon_0 A}{d}}_{=C} V = CV \tag{383}$$

ove la costante di propozionalità C è detta *capacità* e si misura in Farad:

$$[C] = \frac{[q]}{[V]} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F} \tag{384}$$

Condensatori in parallelo



Se colleghiamo le piastre di due condensatori queste diventano un unico conduttore e quindi si trovano allo stesso potenziale. Le cariche accumulate sulle piastre saranno

$$q_a = C_a \Delta V, \qquad q_b = C_b \Delta V \tag{385}$$

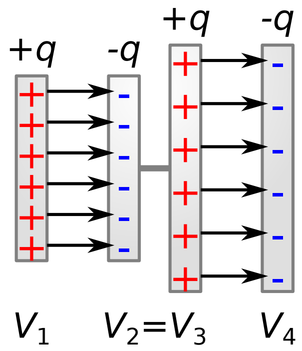
La carica totale Q quindi sarà

$$Q = q_a + q_b = (C_a + C_b)\Delta V = C_{eq.}\Delta V \tag{386}$$

immaginando quindi che i due condensatori siano sostituiti da un unico condensatore questo avrebbe capacità equivalente $C_{eq.}$ pari a:

$$C_{eq.} = C_a + C_b \tag{387}$$

Condensatori in serie



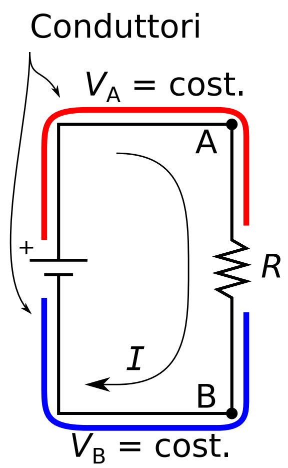
Se colleghiamo due condensatori in serie, le piastre tra i due saranno allo stesso potenziale perché sono un unico conduttore ($V_2 = V_3$). Le cariche accumulate sulle piastre saranno uguali tra di loro, perché non sono fisicamente connesse con le piastre esterne e quindi la carica totale si deve conservare. Essendo la carica iniziale nulla dovrà essere nulla anche dopo che il condensatore è stato caricato. La capacità di un condensatore equivalente sarà

$$C_{eq.} = \frac{Q}{\Delta V_{41}} = \frac{Q}{\Delta V_{43} + \Delta V_{21}} \tag{388}$$

$$\frac{1}{C_{eq.}} = \frac{\Delta V_{43}}{Q} + \frac{\Delta V_{21}}{Q} \tag{389}$$

$$= \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b} \tag{390}$$

Lege di Ohm



Sperimentalmente si vede che, per la maggior parte dei materiali, la corrente che scorre attraverso di essi è proporzionale alla differenza di potenzale ai capi degli stessi.

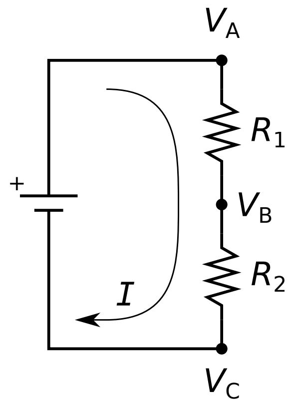
$$\Delta V = IR \tag{391}$$

ove I è la corrente e ΔV è la differenza di potenziale applicata e la costante di proporzionalità R è detta *resistenza* del conduttore. Questa relazione è detta *legge di Ohm*.

Analisi dimensionale:

$$[R] = \frac{[V]}{[I]} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{As^3}} \tag{392}$$

Resistenze in serie



Nel caso in cui si abbiano due resistenze in serie in un circuito, la corrente I che passa attraverso di esse è la stessa. Andando ad applicare la legge di Ohm per calcolare la *resistenza equivalente* si ottiene

$$R_{eq} I = V_A - V_C \tag{393}$$

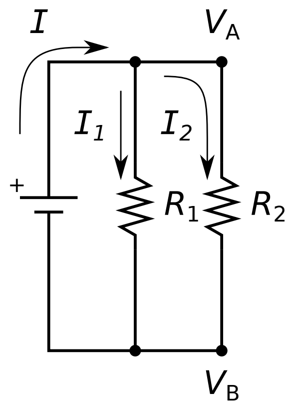
$$R_{eq} = \frac{V_A - V_C}{I} = \frac{V_A - V_B + V_B - V_C}{I} \tag{394}$$

$$= \underbrace{\frac{V_A - V_B}{I}}_{=R_1} + \underbrace{\frac{V_B - V_C}{I}}_{=R_2} = R_1 + R_2 \tag{395}$$

Ovvero la resistenza equivalente di delle resistenze in serie è la somma delle resistenze

$$R_{eq} = \sum_i R_i \tag{396}$$

Resistenze in parallelo I



Nel caso in cui si abbiano due resistenze in parallelo in un circuito, la somma delle correnti I_i che passano attraverso a ciascuna di esse è pari alla corrente che scorre nel circuito:

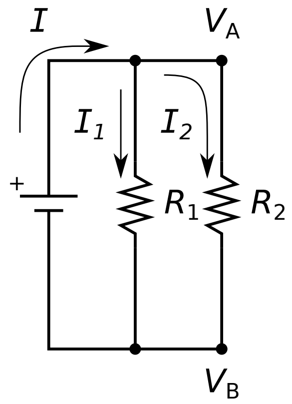
$$I = I_1 + I_2 \tag{397}$$

Inoltre la differenza di potenziale ai capi di entrambe le resistenze è la stessa. Andando ad applicare la legge di Ohm per calcolare la *resistenza equivalente* si ottiene

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{I}{V_A - V_B} = \frac{I_1 + I_2}{V_A - V_B} \tag{398}$$

$$= \frac{I_1}{V_A - V_B} + \frac{I_2}{V_A - V_B} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{399}$$

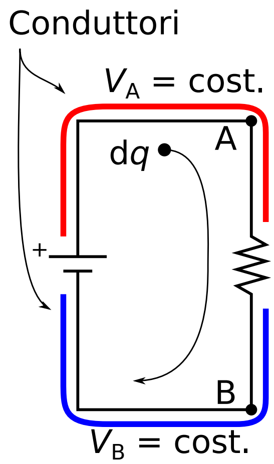
Resistenze in parallelo II



Ovvero l'inverso della resistenza equivalente di delle resistenze in parallelo è la somma degli inversi delle resistenze

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \tag{400}$$

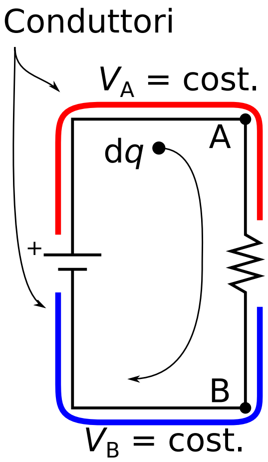
Lavoro di un generatore



Calcoliamo il lavoro compiuto da un generatore per trasportare una carica dq da V_A a V_B:

$$\begin{aligned} dW &= -dU && (401)\\ &= U_B - U_A && (402)\\ &= V_B\, dq - V_A\, dq && (403)\\ &= -\Delta V\, dq && (404) \end{aligned}$$

Potenza



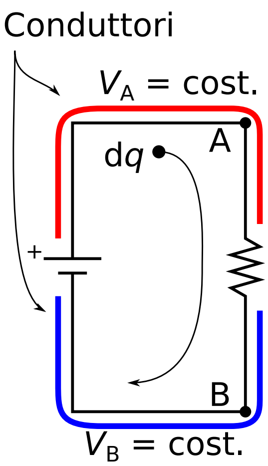
Calcoliamo la potenza del generatore, ricordando che per un generatore la differenza di potenziale deve essere costante

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} && (405)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta V\, q) = q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta V) + \Delta V\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} && (406)\\
&= \Delta V\, I && (407)
\end{aligned}
$$

la cui unità di misura è

$$[P] = [V][I] = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{As^3}} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{W} \qquad (408)$$

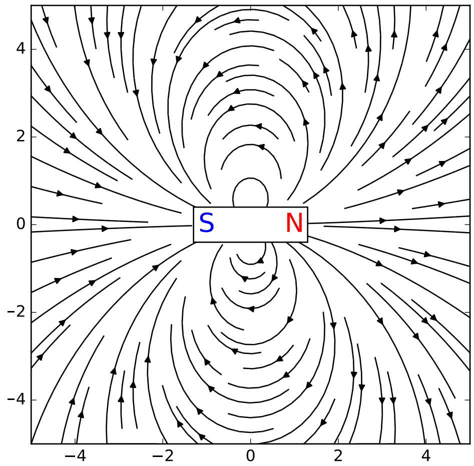
Potenza dissipata da una resistenza



Una resistenza dissipa energia elettrica sotto forma di energia termica (il cosiddetto *effetto Joule*). La quantità di energia termica prodotta per l'unità di tempo è calcolabile dalla potenza dissipata e dalla legge di Ohm:

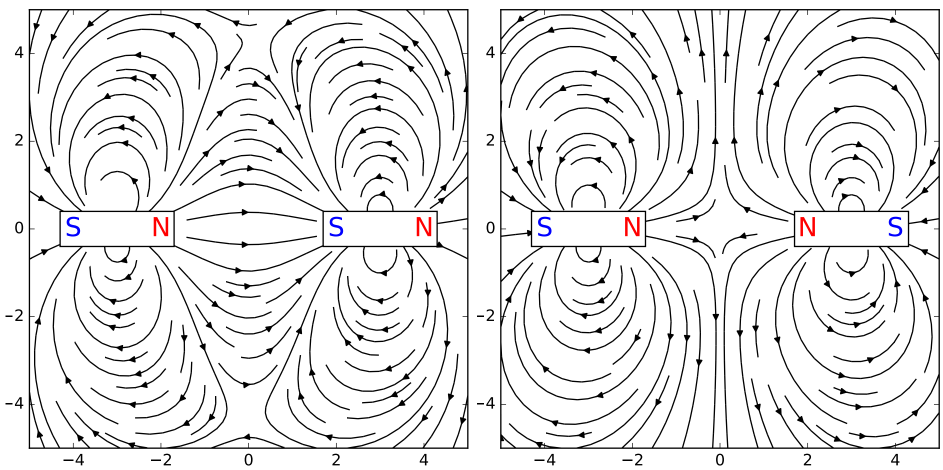
$$P_{\mathrm{resistore}} = V(I)\, I = I^2 R \qquad (409)$$

Campo magnetico I



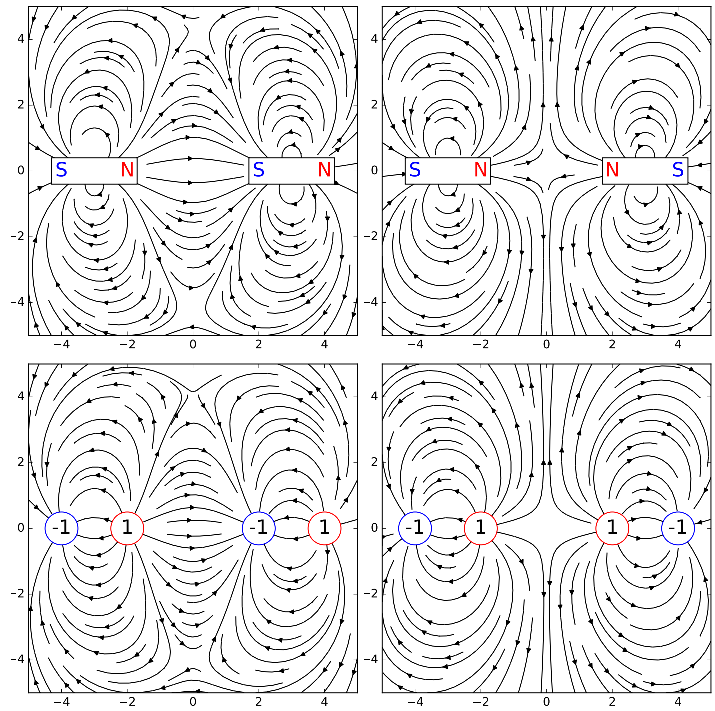
Oltre alle forze elettrostatiche in natura si vedono le cosiddette forze magnetiche, che si possono esercitare tra particolari materiali. Un'importante differenza col campo elettrostatico è che non esistono monopoli magnetici isolati, solo dipoli (*e.g.* le calamite).

Campo magnetico II

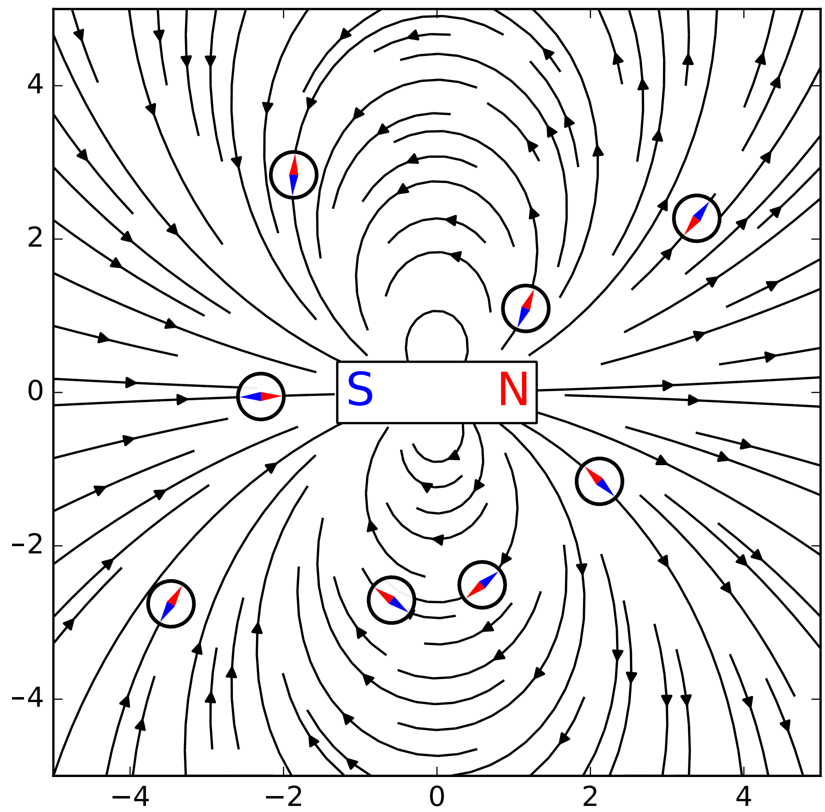


Le calamite sono dei dipoli magnetici possono attrarsi e respingersi reciprocamente. Si comportano in modo simile ai dipoli elettrici.

Campo magnetico III

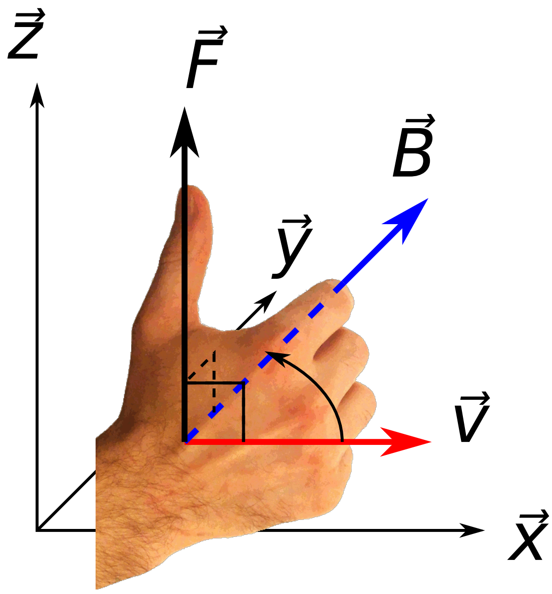


Bussole



Le bussole sono costituite da piccoli aghi magnetizzati, liberi di ruotare, che tendono ad allinearsi con le linee di campo magnetico.

Forza di Lorentz



Sperimentalmente si vede che le cariche elettriche in movimento sono soggette ad una forza, detta *di Lorentz*, se si trovano immerse in un campo magnetico.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{410}$$

Campo magnetico I

Sfrutteremo la forza di Lorentz per derivare una definizione operativa del campo magnetico:

$$F = qvB \quad \Rightarrow \quad B = \frac{F}{qv} \tag{411}$$

Determiniamo l'unità di misura:

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C} \cdot \mathrm{m/s}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}} = 1\,\mathrm{T} \tag{412}$$

Che è detta *Tesla*. Si usa spesso il *Gauss* che è definito come:

$$1\,\mathrm{G} = 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T} \tag{413}$$

Campo magnetico II

E.g. Il campo magnetico terrestre non è uniforme sulla superficie terrestre e varia tra

$$B_{\text{terra}} = 0.2\,\text{G} \leftrightarrow 0.7\,\text{G} \tag{414}$$

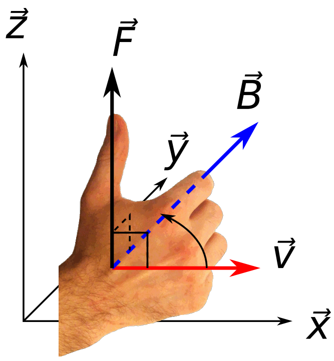
Nella prossimità di una calamita di ferrite possono esserci campi dell'ordine di

$$B_{\text{ferrite}} \approx 0.1\,\text{T} = 1000\,\text{G} \tag{415}$$

mentre per delle calamite al neodimio

$$B_{\text{neodimio}} \approx 1\,\text{T} \tag{416}$$

Lavoro del campo magnetico



Il campo magnetico non compie lavoro. Ricordiamo che la velocità è la derivata della posizione, quindi $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$ e calcoliamo il lavoro compiuto

$$\mathrm{d}\vec{W} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{417}$$

$$= \left(q\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left(q\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t \tag{418}$$

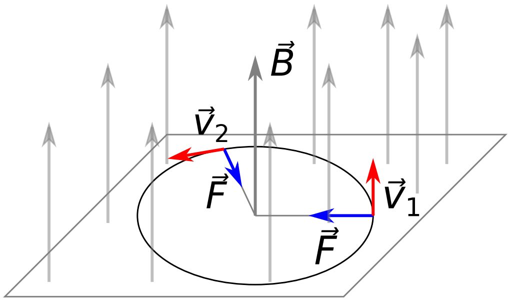
$$= q\underbrace{\left(\vec{v} \times \vec{v}\right)}_{=0} \cdot \vec{B}\,\mathrm{d}t = 0 \tag{419}$$

ove abbiamo usato l'identità

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b}. \tag{420}$$

Intuitivamente $\vec{v} \times \vec{B} \perp \vec{v}$ per le proprietà del protto vettoriale, quindi il prodotto scalare con $\vec{v}$ stesso annulla l'espressione.

Moto in un campo magnetico uniforme



Una carica elettrica in un campo magnetico uniforme, in prima approssimazione, si muove di moto circolare uniforme se la sua velocità è perpendicolare al campo magnetico. Assumiamo che

$$\vec{B} = (0, 0, B_z) \quad \& \quad \vec{v} = (v_x, v_y, 0) \tag{421}$$

Possiamo eguagliare la forza centripeta con la forza magnetica:

$$\vec{F}_{\mathrm{c}} = \vec{F}_{\mathrm{m}} \tag{422}$$

$$m\omega^2 r = qvB = q\omega rB \tag{423}$$

$$\omega = \frac{qB}{m} \tag{424}$$

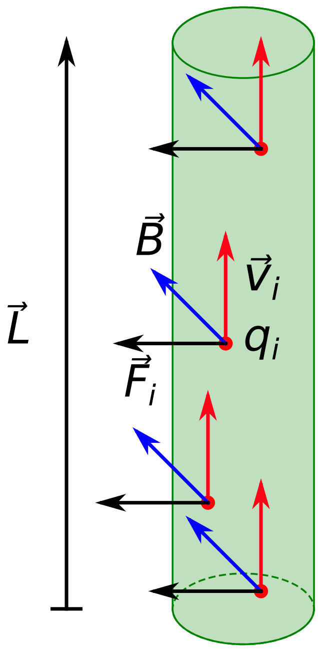
quindi la frequenza di rotazione è $f = \frac{qB}{2\pi m}$.

Forza che agisce su di una carica

Ricordando che anche un campo elettrostatico esercita una forza su una carica, possiamo riassumere i due contributi in:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{425}$$

Forza su un filo percorso da corrente I



Se un filo percorso da corrente (indicato da $\vec{L}$) è immerso in un campo magnetico, ogni carica sente una forza

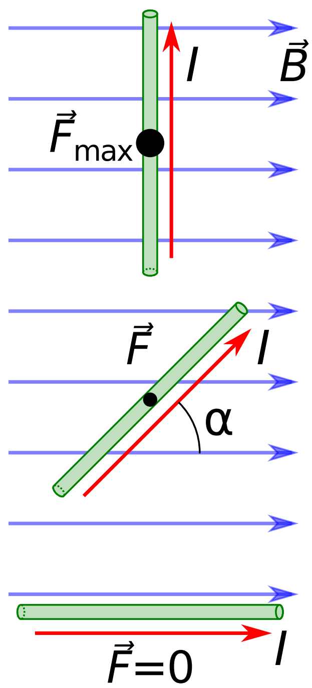
$$\vec{F}_{\mathrm{tot}} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q_i \left(\vec{v}_i \times \vec{B}\right) \tag{426}$$

$$= Q \langle \vec{v} \rangle \times \vec{B} \tag{427}$$

$$= Q \frac{\vec{L}}{\Delta t} \times \vec{B} \tag{428}$$

$$= I\vec{L} \times \vec{B} \tag{429}$$

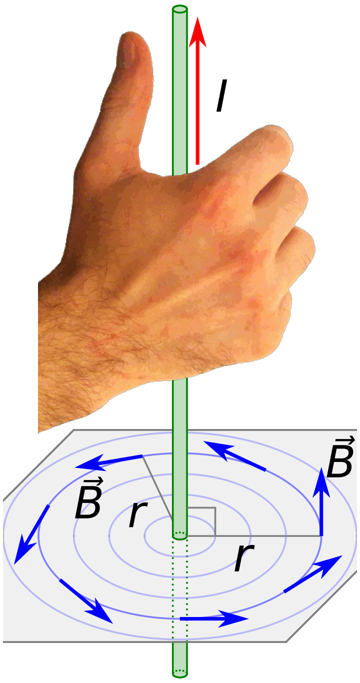
Forza su un filo percorso da corrente II



Se abbiamo dei fili con diverse orientazioni rispetto al campo magnetico, questi subiranno delle forze con diversi moduli.

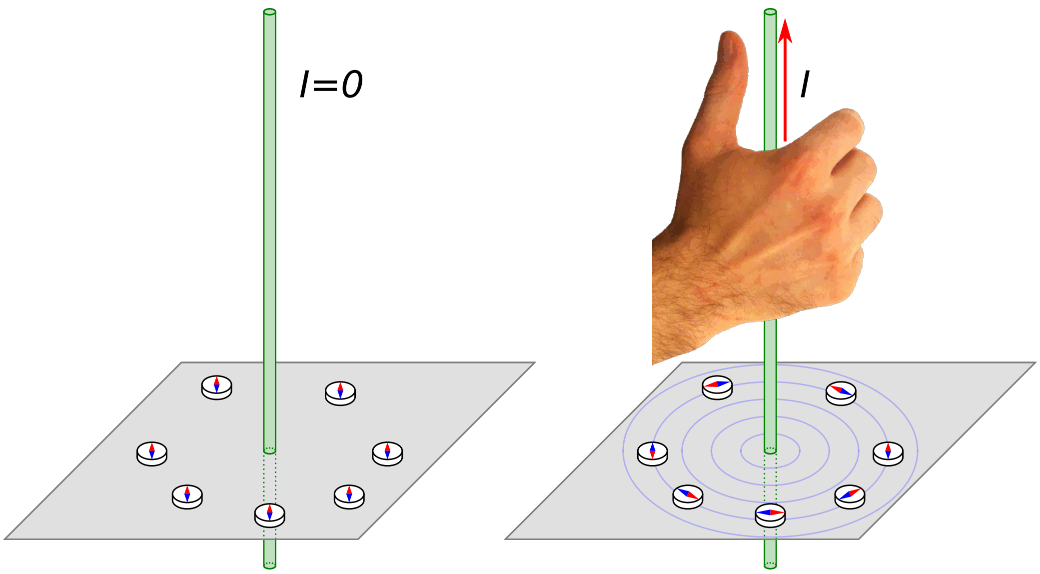
$$\vec{F}_{\mathrm{tot}} = I\vec{L} \times \vec{B} \tag{430}$$

Esperimento di Ørsted I



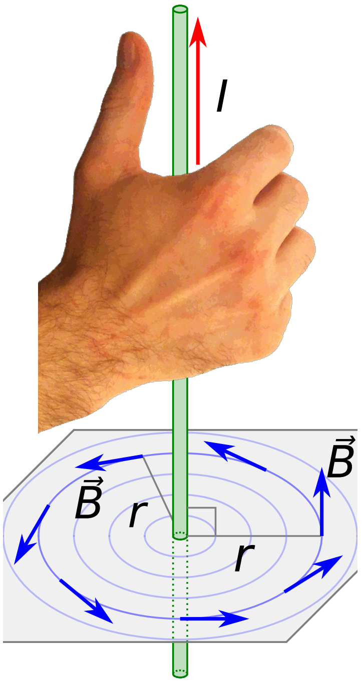
L'*esperimento di Ørsted* fu la prima evidenza sperimentale che una corrente di cariche elettriche genera un campo magnetico. Le linee di campo sono delle circonferenze attorno al filo che conduce la corrente, sono disposte su piani perpendicolari al filo stesso. La direzione del campo segue la regola della mano destra.

Esperimento di Ørsted II



Si può osservare il fenomeno ponendo delle bussole attorno ad un filo. Quando sul filo non scorre corrente, le bussole si allineano col campo magnetico terrestre; quando sul filo scorre corrente queste si allineano secondo il campo magnetico locale.

Legge di Biot-Savart



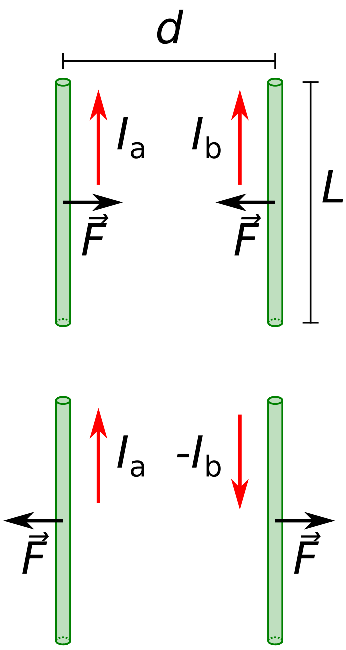
La *legge di Biot-Savart* descrive il campo magnetico attorno ad un filo percorso da corrente. Può essere espressa come

$$\mathrm{d}\vec{B}\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\mathrm{d}\vec{L} \times \vec{u}_r \qquad (431)$$

ove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto, I è la corrente che scorre sulla porzione di filo dL e $\vec{r}$ è la distanza tra la porzione di filo ed il punto considerato. Per un filo di lunghezza infinita diventa

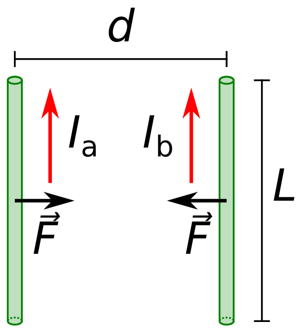
$$\vec{B}\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\vec{u}_L \times \vec{u}_r \qquad (432)$$

Esperimento di Ampere I



Ampere dimostrò come due fili percorsi da corrente si attraggono o respingono, in funzione della direzione della corrente che scorre su di essi. Quindi il campo magnetico generato da un filo è lo stesso tipo di campo magnetico in grado di esercitare delle forze sulle cariche in moto.

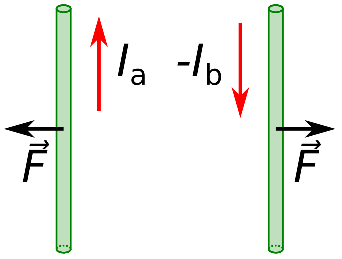
Esperimento di Ampere II



La *forza di Ampere* è

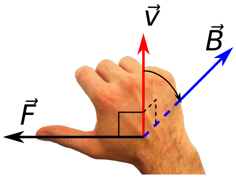
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{L I_a I_b}{d} \tag{433}$$

ove I_i sono le correnti dei fili, L la lunghezza dei due fili e d è la distanza tra i fili.

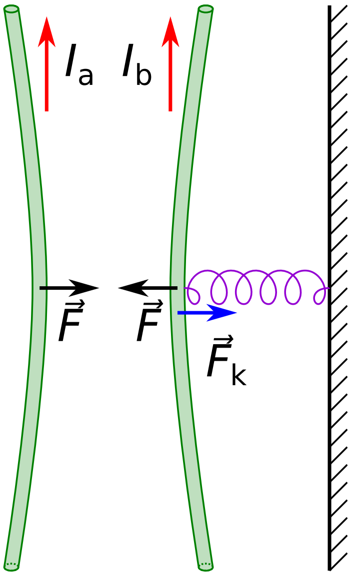


Per determinare la direzione si usa l'espressione della forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{434}$$



Esperimento di Ampere III



La definizione dell'ampere è data dalla misura della forza tra due fili:

$$L = 1\,\mathrm{m}, \qquad d = 1\,\mathrm{m}, \quad I_a = I_b = 1\,\mathrm{A} \tag{435}$$

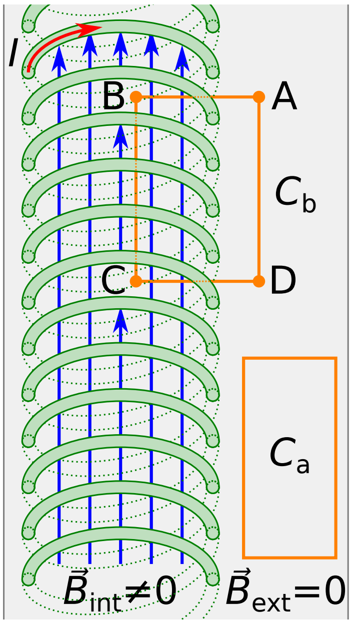
ottenendo una forza di

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{L I_a I_b}{d} \tag{436}$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}}{2\pi}\,\frac{1\,\mathrm{m}\cdot 1\,\mathrm{A}\cdot 1\,\mathrm{A}}{1\,\mathrm{m}} \tag{437}$$

$$= 2\cdot 10^{-7}\,\mathrm{N} \tag{438}$$

Campo magnetico all'interno di un solenoide indefinito

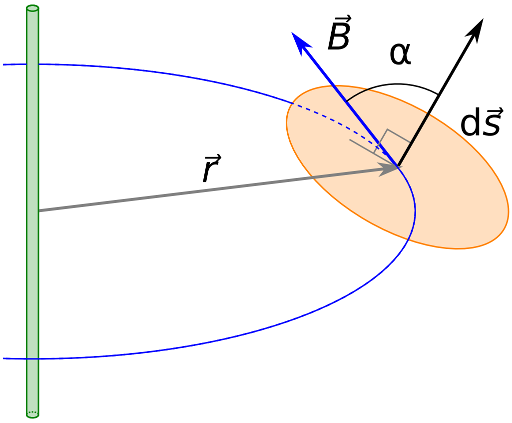


Quindi il campo all'interno del solenoide è

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I = \mu_0 n I. \quad (439)$$

ove abbiamo definito n come la densità di spire per unità di lunghezza.

Flusso del campo magnetico



Come per il campo elettrico, è possibile calcolare il flusso del campo magnetico su di una superficie

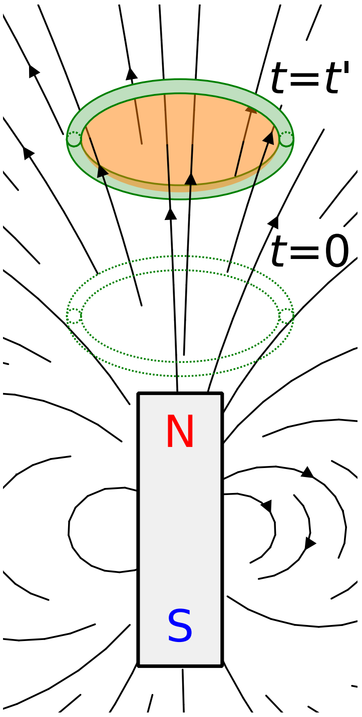
$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (440)$$

ove $d\vec{s}$ è un elemento di superficie infinitesimo. Integrando si ottiene il valore su tutta la superficie S

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (441)$$

Il flusso del campo magnetico per una *superficie chiusa* è sempre nullo.

Legge di Faraday

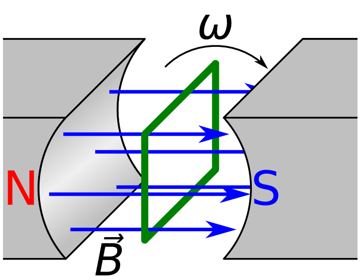


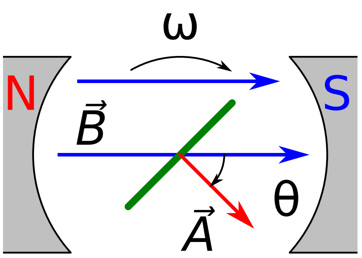
La *legge di Faraday* mette direttamente in relazione il campo magnetico col campo elettrico. Dato il flusso del campo magnetico Φ_B su di una superficie (non chiusa) definita da un circuito conduttore, si ha

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (442)$$

ove $\mathcal{E}$ è detta *forza elettromotrice* (f.e.m.) e si misura in volt. Sebbene sia chiamata "forza", la f.e.m. rappresenta una differenza di potenziale che induce il movimento di cariche lungo il circuito.

Dinamo I





Prendiamo una spira di area A che ruota, con velocità angolare costante ω, in un campo magnetico B costante ed uniforme. Il flusso del campo è

$$\Phi_B(t) = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\theta = BA\cos(\omega t) \qquad (443)$$

Calcoliamo la f.e.m.

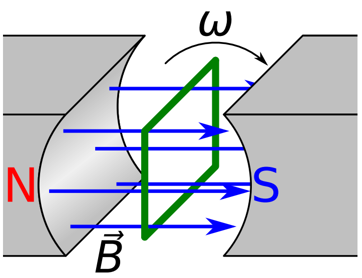
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}(t) = -BA\frac{d}{dt}\cos(\omega t) \qquad (444)$$

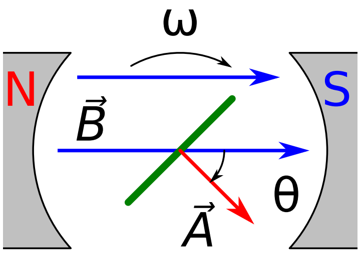
$$= \omega BA \sin(\omega t) \qquad (445)$$

se immaginiamo di inserire una resistenza nel circuito abbiamo una corrente variabile pari a

$$I = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{\omega BA}{R}\sin(\omega t) \qquad (446)$$

Dinamo II





Anche il campo magnetico terrestre ($B \approx 0.5\,\mathrm{G} = 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$) è utilizzabile per indurre il movimento di cariche. Immaginiamo di avere una spira con area $A = 1\,\mathrm{m}^2$, calcoliamo quale deve essere la frequenza di rotazione f per avere una f.e.m. massima di 1 V. Calcoliamo la f.e.m.

$$\mathcal{E} = \omega B A \sin(\omega t) \tag{447}$$

Il massimo lo si ha quando $\sin(\omega t) = 1$ quindi

$$\mathcal{E}_{\text{max}} = \omega B A \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{2\pi B A} = 3183\,\mathrm{Hz} \tag{448}$$